

Espace de probabilités

Introduction

- La théorie des probabilités remonte au 17^e et a été formellement conceptualisée au début du 20^e. Il s'agit à l'origine de modéliser mathématiquement des phénomènes complexes dont le résultat ne peut être prédit par avance, ou dont la modélisation déterministe est trop complexe pour être mise en œuvre pratiquement.
- Exemples : Pancer de dé, mesure quantique
trajectoire d'une particule dans un gaz, un liquide...

Au lieu de se focaliser sur une issue possible de l'expérience, on considère l'ensemble des résultats possibles et on leur attribue un "poids" selon qu'ils sont plus ou moins probables.

- La théorie des probabilités est toujours largement utilisée pour modéliser des phénomènes concrets mais c'est aussi une théorie mathématique autonome qui a des interactions profondes avec de nombreuses branches des mathématiques : l'analyse, l'algèbre, la géométrie...

1. Espace de probabilités.

L'objet de base de la théorie est la notion d'espace de probabilité. C'est la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

où

* Ω est un ensemble, appelé univers des possibles.

Moralement, Ω représente l'ensemble des résultats possibles de l'expérience que l'on cherche à modéliser

Exemple: Lancer de dé $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$

Lancer de pièce $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ ou $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}, \text{tranche}\}$

Trajectoire d'une particule de pollen $\Omega = C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$

* $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω , i.e. $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}(\Omega)$ Les parties de Ω

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés événements

Moralement, ce sont les ensembles à qui on souhaite être capable d'attribuer un poids, "une probabilité".

Exemple: Tribu triviale $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Tribu totale $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\Omega)$

. Si Ω est au plus dénombrable, on choisira $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\Omega)$

. Si Ω est un espace métrique, on considérera la tribu borélienne.

ex: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3), \|\cdot\|_\infty, \mathcal{B})$.

Rappel : Une intersection (quelconque) de tribus est une tribu. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, alors

$$\sigma(\mathcal{T}) := \bigcap_{\mathcal{T}' \text{ tribu } \mathcal{T} \subset \mathcal{T}'} \mathcal{T}'$$

est la plus petite tribu contenant $\mathcal{T}$, on dit que c'est la tribu engendrée par $\mathcal{T}$.

* $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$

Définition : on dit qu'une application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ est une mesure de probabilité si :

1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'événements avec $A_m \cap A_n = \emptyset$ si $m \neq n$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

(σ -additivité)

2. Premiers exemples

• P.i.e ou face équilibrée : $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{\text{pile}\}, \{\text{face}\}, \{\text{pile}, \text{face}\}\}$$

$$\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = \frac{1}{2}.$$

- Lancer de dé équilibré : $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(\{1\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{2\}) = \frac{1}{6}, \dots, \quad P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

- Choisir un nb au hasard uniformément dans $[0, 1]$

$$\Omega = [0, 1], \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1]) \text{ boréliens}$$

$P =$ mesure de Lebesgue

$\uparrow$ cf. cours
intégration

$\forall a < b$ dans $[0, 1]$

$$P([a, b]) = b - a.$$

Remarque $P(\{a\}) = P([a, a]) = a - a = 0$!

- Choisir un nb au hasard dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\Omega = \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$$

pas de proba uniforme !

$$\text{ex } P(\{k\}) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{6}{\pi^2}, \quad P(\{k\}) = \frac{1}{\binom{6}{k}} \cdot \frac{1}{n^6}$$

$$P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1} \text{ avec } p \in]0, 1[$$

• Choisir un mb au hasard dans IR

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tribu borélienne.

Si on dispose d'une fonction positive $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f(u) du = 1$ alors on peut considérer

$$P([a, b]) = \int_a^b f(u) du$$

ex: $f(u) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+u^2}$ Cauchy

$f(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}$ Laplace

$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ Gaussien

• On peut répéter les expériences

Lancer de 2 dés

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 = \{(h, l), h, l \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega)$$

$$P(\{(h, l)\}) = \frac{1}{6}^2$$

3. Propriétés élémentaires et opérations ensemblistes

En terme probabiliste, une union s'interprète comme un "ou", ou un "il existe"; une intersection comme un "et" ou un "pour tout".

Proposition : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $A, B, (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des événements

- 1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 2) Si $B \subset A$, $P(B) \leq P(A)$ et $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
- 3) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 4) $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$
- 5) Si (A_n) est croissante i.e. $A_n \subset A_{n+1} \forall n$, alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

- 6) Si (A_n) est décroissante, i.e. $A_n \supset A_{n+1} \forall n$, alors

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

Preuve : 1) $A \cup B = A \setminus (A \cap B) \sqcup B \setminus (A \cap B) \sqcup (A \cap B)$

et $A = (A \cap B) \sqcup A \setminus (A \cap B)$, $B = (B \cap A) \sqcup B \setminus (A \cap B)$

Ainsi : $P(A \cup B) = P(A \setminus (A \cap B)) + P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus (A \cap B))$; $P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus (A \cap B))$

En combinant $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2) Voir 1).

$$3) \Omega = A \cup A^c \text{ donc } P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c).$$

$$4) \text{ D'après 1) } P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Par récurrence on obtient alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Pour passer à la limite, on utilise le point 5).

5) Si (A_n) est croissante, en posant $A_1 = \emptyset$ on a

$$A_n = \bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{k=0}^n A_k \setminus A_{k-1} \quad (\text{union disjointe!})$$

$$\text{Ainsi: } P(A_n) = \sum_{k=0}^n P(A_k \setminus A_{k-1}) \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n P(A_k \setminus A_{k-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1})$$

$$\stackrel{\text{σ-add}}{=} P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \setminus A_{k-1}\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right)$$

6) Découle de 5) en passant au complémentaire. □

Définition : Si (A_n) suite d'événements, on pose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A_n} = \limsup A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

Remarque : $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \geq 1, \forall k \geq n, \omega \in A_k$
i.e "à partir d'un certain rang, tous les A_n sont réalisés".

$$\omega \in \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \Leftrightarrow \forall n \geq 1, \exists k \geq n, \omega \in A_k$$

i.e "une infinité de A_n est réalisée" ou encore "les A_n sont réalisés infiniment souvent".

Remarque : $\left(\varprojlim_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^c = \varinjlim_{n \rightarrow \infty} A_n^c$

ex: . $A_n = [n, +\infty[$

$$\varprojlim_n A_n = \varprojlim_n A_n = \emptyset$$

. $A_n =]-n, +\infty[$

$$\varprojlim_n A_n = \varprojlim_n A_n = \mathbb{R}$$

. $A_n = [-1^n, 3]$

$$\varprojlim_n A_n = [1, 3] ; \varinjlim_n A_n = [-1, 3]$$

Remarque : on a toujours $\varprojlim_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \varinjlim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Proposition (premier lemme de Borel-Cantelli)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de proba et (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{F}$.

S: $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\varprojlim_n A_n) = 0$

i.e $\mathbb{P}(A_n \text{ arrive infinis fois}) = 0$

i.e $\mathbb{P}(A_n \text{ n'arrive qu'un nombre fini de fois}) = 1$.

IP preuve : $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$
 décroissante en n

donc $IP(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} IP(\bigcup_{k \geq n} A_k)$

par propriété de monotonie de P .

• Par ailleurs, $IP(\bigcup_{k \geq n} A_k) \leq \sum_{k \geq n} IP(A_k)$
 reste d'une
 série cv
 par hypothèse.

• Ainsi : $\lim_{n \rightarrow \infty} IP(\bigcup_{k \geq n} A_k) = 0$

d'où le résultat. $\square$

Exemple : on joue à pile / face une infinité
 de fois, disons pile = 0, face = 1.

$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$

$IP(\text{laque l'ar} = \text{pile}) = \frac{1}{2}$

$A_m = \{ \text{au cours des } m \text{ premiers lancers, aucun face} \}$

$$IP(A_m) = \frac{1}{2^m} \text{ de sorte que } \sum_{m \in \mathbb{N}^*} IP(A_m) < \infty$$

$$\text{ainsi } IP(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$$

i.e. $IP(A_n \text{ arrive qu'un mb finit de face}) = 1$

$$\therefore IP(\text{face finit par sortir}) = 1.$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_r) \in \{0, 1\}^r$ v. mod

$$A_m = \left\{ (w_1, \dots, w_r) \neq a, (w_{r+1}, \dots, w_{2r}) \neq a, \right. \\ \left. (w_{m/r+1}, \dots, w_{mr}) \neq a \right\}$$

$$IP(A_m) = \left(1 - \frac{1}{2^r}\right)^m \text{ et } \sum_m IP(A_m) < \infty$$

$$\text{si-l: } IP(\text{le mod } a \text{ finit par sortir}) = 1 !!!$$