

Variables aléatoires

1. Définitions et premières propriétés.

1.1 Image réciproque.

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(E, \mathcal{E})$ deux ensembles munis de tribus (on parle d'espaces mesurables)

Rappel: tribu = famille d'ensemble stable par complémentaire / union dénombrable.

Si $f: \Omega \rightarrow E$ est une fonction, pour $u \in E$ on peut considérer

$$f^{-1}(\{u\}) = \{ \omega \in \Omega, f(\omega) = u \}$$

les antécédents de u .

Plus généralement, si $B \subset E$ est un $\mathcal{E}$ -ensemble de E , on peut considérer

$$f^{-1}(B) = \{ \omega \in \Omega, f(\omega) \in B \}$$

ce sont les points de Ω dont l'image est dans B .

Proposition: Soit $f: \Omega \rightarrow E$ et B et $(B_i)_{i \in I}$
sous des sous-ensembles de E alors

$$\bullet f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$$

$$\bullet f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

$$\bullet f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

En particulier si $\mathcal{E}$ est un tribu sur E
alors $f^{-1}(\mathcal{E})$ est un tribu sur Ω .

Preuve:

$$\begin{aligned} \bullet f^{-1}(B^c) &= \{\omega \in \Omega, f(\omega) \in B^c\} \\ &= \{\omega \in \Omega, f(\omega) \notin B\} \\ &= \{\omega \in \Omega, f(\omega) \in B^c\} \\ &= (f^{-1}(B))^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) &= \{\omega \in \Omega, f(\omega) \in \bigcup_{i \in I} B_i\} \\ &= \{\omega \in \Omega, \exists i \in I, f(\omega) \in B_i\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{\omega \in \Omega, f(\omega) \in B_i\} \\ &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

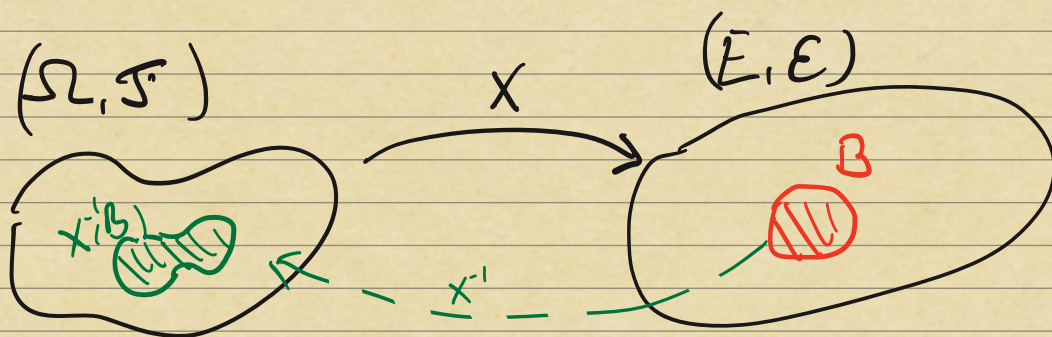
• idem pour l'intersection.

1.2 Variables et vecteurs aléatoires

Définition: Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. On appelle variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans E toute application mesurable

$$X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

$$\text{i.e. } \forall B \in \mathcal{E}, X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$



Exemple: on lance deux dés

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\# \Omega} \text{ proba uniforme.}$$

On considère P somme des deux dés

$$\text{s.t. } \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$$

$$X(\omega) = \omega_1 + \omega_2 \in \{2, 3, \dots, 12\}$$

• On joue un i-f-ite de fois à pile/pau
 $\Omega = \{0, 1\}^{15}$ 0 pile, 1 pau

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad P(\{0\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{2} \text{ pour } \begin{matrix} \text{d'après} \\ \text{Pascal} \end{matrix}$$

un élément de Ω est une suite $(\omega_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$T = \inf \{ n, \omega_n = 1 \} \in \mathbb{N}^*$$

premier indice où la suite vaut 1.

- On choisit un ab au hasard dans $[0,1]$
 $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbb{P}$ mesure de Lebesgue
i.e. $\mathbb{P}([a,b]) = b-a$.

On considère pour $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \omega^2$$

$$Y(\omega) = \sin(\pi\omega)$$

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \omega > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Remarque: La somme, le produit, le quotient, le min, max, sup, $\inf$, $\limsup$, $\liminf$ de v.a est une v.a.

1.3 Loi d'une variable aléatoire

Définition : Soit $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une v.a.

On appelle loi de X , la mesure P_X sur $(E, \mathcal{E})$, mesure image de P par X :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad P_X(A) := P(X^{-1}(A)) = P(X \in A) \\ = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}).$$

P_X est une mesure σ -probable sur $(E, \mathcal{E})$,

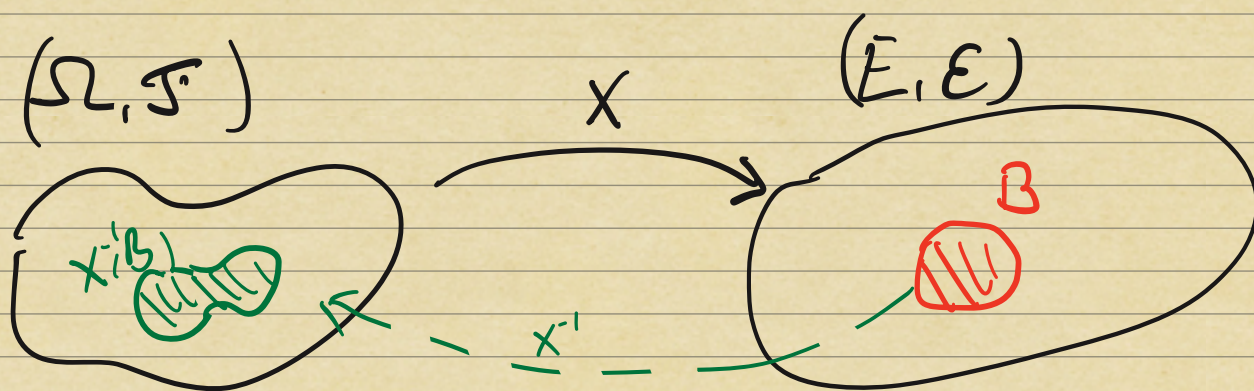
$$P_X(\emptyset) = P(\emptyset) = 0$$

$$P_X(E) = P(X^{-1}(E)) = P(\Omega) = 1$$

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \in A_i\}\right)$$

$$\stackrel{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(X \in A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(A_i).$$

□



$$P(X^{-1}(B)) =: P_X(B)$$

"pour mesurer B dans E , on le ramène en arrière via X et on le mesure avec P dans $\mathcal{F}$ "

Exemple : on jette deux dés et on fait la somme.

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ probabilité uniforme i.e. Si $A \in \mathcal{F}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.

On considère alors

$$X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\{2, \dots, 12\}, \mathcal{S}(\{2, \dots, 12\}))$$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(\{2\}) &= \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega, \omega_1 + \omega_2 = 2\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega = (\omega_1, \omega_2) = (1, 1)\}) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_X(\{3\}) = \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{(1, 2)\} \cup \{(2, 1)\}) = \frac{2}{36}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X &= \frac{1}{36}(\delta_2 + \delta_{12}) + \frac{2}{36}(\delta_3 + \delta_{11}) + \frac{3}{36}(\delta_4 + \delta_{10}) + \frac{4}{36}(\delta_5 + \delta_9) \\ &\quad + \frac{5}{36}(\delta_6 + \delta_8) + \frac{6}{36}\delta_7 \end{aligned}$$

$$\text{On vérifie bien que } \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{10}{36} + \frac{6}{36} = \frac{36}{36} = 1 !$$

pas encore fait en cours...

$$\left[\text{Exemple : sur } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \text{Lebesgue}) \right. \\ \left. \mathbb{P}([a, b]) = b - a \right.$$

$$X(\omega) = \omega^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X([a, b]) &= \mathbb{P}(\{\omega, X(\omega) \in [a, b]\}) \\ &= \mathbb{P}(\omega \in [1, 1], \omega^2 \in [a, b]) \end{aligned}$$

$$IP(\omega \in [a, b], \omega \in [\sqrt{a}, \sqrt{b}]) \\ = \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Exemple: Soit $X \stackrel{P}{\leftarrow} ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \rightarrow \{0,1\}^n, \mathcal{S}(\{0,1\}^n)$

$$| \quad x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} \quad \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

i.e. X renvoie les n premières décimales de x en base 2.

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ un n -uplet. Alors

$$P_X(\{\varepsilon\}) = IP(\{X = \varepsilon\}) = IP(\{x, x_i = \varepsilon_i \forall i=1, \dots, n\}) \\ = IP\left(x \in \left[\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right]\right)$$

$$\text{i.e. } P_X(\{\varepsilon\}) = \frac{1}{2^n}, \quad \forall \varepsilon \in \{0,1\}^n,$$

i.e. P_X est la loi uniforme sur $\{0,1\}^n$.

Si $i \in [1, n]$ et si $X_i(\omega) = x_i$ alors la loi marginale est une loi de proba sur $\{0,1\}$ et

$$P_{X_i}(\{0\}) = IP(X_i = 0) = IP_X(\{0,1\}^{i-1} \times \{0\} \times \{0,1\}^{n-i-2}) \\ = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$P_{X_i}(\{1\}) = \frac{1}{2} \quad \text{i.e. } P_{X_i} \text{ est la loi un. forme sur } \{0,1\}.$$