

Exercice 3

Rappel: $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$

1) $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x)$

2) $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$

3) $\mathbb{1}_{A \setminus B}(x) = \mathbb{1}_{A \cap B^c}(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_{B^c}(x)$
 $= \mathbb{1}_A(x) \cdot (1 - \mathbb{1}_B(x)).$

4) Si $(A_n) \uparrow$ alors la suite de fonction $(\mathbb{1}_{A_n})$ est croissante

$$\mathbb{1}_{\bigcup_n A_n}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \bigcup_n A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1$$

croissante
 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1.$$

idem pour l'intersection (passer au complémentaire)

Exercice 4

$$1) \Sigma := \sigma(\{A, B, C\}) = \sigma(\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}) \neq \mathcal{F}(\Omega)$$

$$A, B, C \in \Sigma \text{ donc } \left| \begin{array}{l} A \cap B = \{2\} \in \Sigma \\ A \setminus B = \{1\} \in \Sigma \\ B \setminus A = \{3\} \in \Sigma \\ \Omega \setminus A \cup B = \{4, 5\} \in \Sigma \end{array} \right.$$

2) Σ coïncide avec $\sigma(\{A, B\})$ car $C = \emptyset$ est dans la tribu engendrée.

3) Pour engendrer $\mathcal{F}(\Omega)$, il faut ajouter un ensemble de façon à pouvoir engendrer les singlets $\{4\}$ et $\{5\}$.

$$\text{Par exemple } \left| \begin{array}{l} \sigma(\{A, B, D\}) = \mathcal{F}(\Omega) \\ \text{avec } D = \{4\}. \end{array} \right.$$

Exercice 5

Notons $T = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j, J \subset \{1, \dots, n\} \right\}$

On remarque que T est une tribu. En effet

- $\Omega \in T$ (prendre $J = \{1, \dots, n\}$)
- si $B = \bigcup_{j \in J} A_j \in T$, $B^c = \bigcup_{j \in J^c} A_j \in T$
- $\bigcup_p \bigcup_{j \in J_p} A_j = \bigcup_{j \in \bigcup_p J_p} A_j$ donc T est stable par union dénombrable.

T est donc une tribu qui contient tous les A_i donc elle contient la tribu engendrée ie $\sigma(A_1, \dots, A_n) \subset T$.
Maintenant toute tribu qui contient les A_i doit contenir leurs unions finies, ie $T \subset \sigma(A_1, \dots, A_n)$ et finalement
 $T = \sigma(A_1, \dots, A_n)$.

Exercice 8

1) On lance un dé h fois, $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}^h$, $P_1 =$ uniforme
On lance 2 dés $2h$ fois $\Omega_2 = (\{1, \dots, 6\}^2)^{2h}$, $P_2 =$ uniforme.

$$P_1(\text{au moins un six}) = 1 - P_1(\text{aucun six}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^h \approx 0.52$$

$$P_2(\text{au moins un double six}) = 1 - P_2(\text{aucun db six}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{2h} \approx 0.49$$

2) $\Omega = (\{1, \dots, 6\}^2)^n$, P uniforme

$$P(\text{au moins un double six}) = 1 - P(\text{aucun double six}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 25.$$

Exercice 9

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) \\ &\quad - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) \\ &\quad - [P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

• Par récurrence, si $m \geq 3$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k \cup A_m\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) + P(A_m) - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) \cap A_m\right) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\right) + P(A_m) - P\left(\bigcup_{k=1}^{m-1} (A_k \cap A_m)\right) \\ &\stackrel{\text{hyp. r.}}{=} \sum_{I \subset \{1, \dots, m-1\}} (-1)^{\#I-1} P\left(\bigcap_I A_k\right) + P(A_m) - \sum_{I \subset \{1, \dots, m-1\}} (-1)^{\#I} P\left(\bigcap_I A_k \cap A_m\right) \\ &= \sum_{I \subset \{1, \dots, m\}} (-1)^{\#I-1} P\left(\bigcap_I A_k\right) \end{aligned}$$