Exercice 3

- 1) ⇒ 2) Vu en cours. Si $(A_n)\uparrow$, en posant $A_{-1} = \emptyset$, on a

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m = \bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} (A_n \setminus A_{n-1}) \quad \text{(union disjointe)}$$

et $A_N = \bigcup_{m=0}^{N} A_m = \bigsqcup_{m=0}^{N} A_n\setminus A_{n-1}$ de suite que

$$\mathbb{P}(A_N) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n\setminus A_{n-1}) \xrightarrow{N\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n\setminus A_{n-1}) \overset{\sigma\text{-additivité}}{=} \mathbb{P}\Big(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n\setminus A_{n-1}\Big)$$
$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0} A_n\Big)$$

- 2) ⇔ 3) On passe au complémentaire.

- 3) ⇒ 4) 4) est un cas particulier de 3)

- 4) ⇒ 3) Si (A_m) suite décroissantes, on considère

$B_n := A_m \setminus \left(\bigcap_k A_k\right)$, alors $B_n \downarrow$ et $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m = \emptyset$

D'après 4) on a alors $\lim_{m\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$

or $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_m \setminus (\bigcap A_k))$
$= \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(\bigcap A_k)$

i.e $\lim_{m\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_k A_k\right)$.

- 2) ⇒ 1) Si (A_n) suite d'événements disjoints, on écrit

$$\bigsqcup_{m\geq 0} A_m = \bigcup_{m\geq 0} \underbrace{\bigcup_{k\leq m} A_k}_{\text{croissant en } n.}$$

Alors $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\geq 0} A_n\right) \overset{2)}{=} \lim_{m\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\leq m} A_k\right)$
$= \lim_{m\infty} \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$

Exercice 4

- $\underline{\lim}_{n\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \iff \sup_{m\geq 1} \inf_{k\geq m} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$

Comme $\mathbb{1}_{A_n}(\omega)$ vaut zéro ou un, on a donc

$\inf_{k\geq m} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1 \iff \forall k \geq m \quad \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1,$

Aussi $\sup_{m\geq 1} \inf_{k\geq m} \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1 \iff \exists n, \forall k\geq n \quad \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$

$$\iff \omega \in \bigcup_n \bigcap_{k\geq m} A_k$$

$$\iff \omega \in \underline{\lim}_{m\infty} A_m$$

$$\iff \mathbb{1}_{\underline{\lim}_{n\infty} A_n}(\omega) = 1.$$

- On peut faire le même raisonnement avec la $\overline{\lim}$, ou on peut déduire le résultat en passant au complémentaire.

Exercice 5

Solution:

1) On applique le Lemme de Borel-Cantelli 1. On vérifie dans un premier temps que $\sum_n P(A_n) < \infty$.

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n^{2+\epsilon}} = \frac{n}{n^{2+\epsilon}}, \sum_n P(A_n) = \sum_n \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$$

c'est une série de Bertrand convergence on a donc bien vérifiée l'hypothèse du Lemme. On conclut que

$$P(\limsup_n A_n) = 0$$

2) On applique la définition : la limite supérieure d'une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ de parties d'un ensemble Ω est l'ensemble $\limsup_n A_n$ des éléments ω de Ω tels que l'assertion $\{\omega \in A_k\}$ soit vérifiée pour une infinité d'indices $k \geqslant 0$. Donc le contraire est vrai : pour presque tout ω, $\{\omega \in A_k\}$ ne se réalise qu'un nombre fini de fois (autrement dit l'ensemble où c'est vrai est de mesure/proba nulle.).

Exercice 6

Solution:

1. On utilise le lemme Borel-Cantelli 1, en notant $B_n := A_n \cap A$, on a

$$\sum_n P(B_n) < \infty \implies P(\limsup_n B_n) = 0.$$

Par ailleurs on montre que

$$\limsup_n B_n = (\limsup A_n) \cap A, \ \limsup_n A_n$$
$$= \left(\limsup_n A_n \cap A\right) \cup \left(\limsup_n A_n \cap A^c\right)$$

Dans un deuxième temps on a

$$\begin{aligned} P(\limsup_n A_n) &= P(\limsup_n A_n \cap A) + P(\limsup_n A_n \cap A^c) \\ &= P(\limsup_n B_n) + P(\limsup_n A_n \cap A^c) = P(\limsup_n A_n \cap A^c) \end{aligned}$$

En utilisant que $P(A \cap B) \leqslant P(B)$ on obtient que

$$0 \leqslant P(\limsup_n A_n) \leqslant P(A^c) = 1 - P(A) \leqslant \varepsilon$$

avec ε arbitraire.

2. En posant $B_n := \cap_{k \geqslant n} A_k^c$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_ε tel que $n \geqslant n_\varepsilon$ implique $|P(B_n) - 1| \leqslant \varepsilon$. Soit encore $P(B_n) \geqslant 1 - \varepsilon$. On considère alors : (attention n est ici fixé par ε ci dessus !)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k \cap B_n)$$

On écrit alors que pour tout $k \geqslant n+1$ on a $A_k \cap (\cap_{i \geqslant n} A_i^c) = \emptyset$ et donc le dernier terme de droite est nul ! Ceci donne une somme finie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cap B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant n < \infty$$

Puisqu'on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset \Omega$ et donc $P(A_n) \leqslant 1$ ce qui permet de conclure que le terme de droite est fini.