

Exercice 3

Soit $X: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{I}^P = \{\emptyset, \Omega\}$ la tribu triviale.

- Si $X(\omega) = x \quad \forall \omega \in \Omega$ alors $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$X^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin A \\ \Omega & \text{si } x \in A \end{cases}$$

i.e X est mesurable par rapport à $\mathcal{I}^P$.

- Réciproquement, si X est mesurable par rapport à $\mathcal{I}^P$,
soit $\omega \in \Omega$ et $x := X(\omega)$.

Alors $X^{-1}(\{x\}) \ni \omega$ donc $X^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$

i.e $X^{-1}(\{x\}) = \Omega$ i.e $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = x$.

Exercise 4

$$\bullet \quad \mathbb{P}(E_k) = \mathbb{P}(X = k \mid \text{div } k \mid X)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = p_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(p_j)^s} \cdot \frac{1}{\{\omega\}}$$

$$= \frac{1}{p^s} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s} \cdot \frac{1}{\{\omega\}} \right)}_{=1}$$

$$\bullet \quad \mathbb{P}_X \left(\bigcap_{i=1}^n E_{p_i} \right) = \mathbb{P}(p_i \mid X, \forall i=1, \dots, n)$$

$$= \mathbb{P}(\prod p_i \mid X) = \mathbb{P}(E_{\prod p_i})$$

$$= \frac{1}{(\prod p_i)^s} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(E_{p_i})$$

$$\bullet \quad \frac{1}{\{\omega\}} = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}_X \left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} E_p^c \right)$$

$$= \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{P}(E_p^c) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \mathbb{P}(E_p))$$

$$= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right).$$

Exercice 5

- 1) L'espace de proba est $\Omega = \{\text{pile}/\text{face}\}^m$ avec
la mesure uniforme IP .

$$\begin{aligned} IP(\text{le "pile"}) &= \frac{\# \{ \text{le pile} \}}{\# \Omega} \\ &= \frac{1}{2^m} \cdot \binom{m}{k} \end{aligned}$$

↖ nb de façons de
choisir la position
des k piles parmi
des m lancers

- 2) On note N_p le nb de pile N_f le nb
de face au cours des m lancers.

$$\text{On a bien sûr } N_p + N_f = m$$

$$\text{Par symétrie } IP(N_p > N_f) = IP(N_f > N_p)$$

ensuite comme

$$\Omega = \{N_p > N_f\} \sqcup \{N_f > N_p\} \sqcup \{N_f = N_p\}$$

on déduit

$$\begin{aligned} 1 = IP(\Omega) &= IP(N_p > N_f) + IP(N_f > N_p) + IP(N_f = N_p) \\ &= 2 IP(N_p > N_f) + IP(N_f = N_p) \end{aligned}$$

de sorte que

$$P(N_p > N_f) = \frac{1 - P(N_f = N_p)}{2}.$$

. Enfin, si n impair $P(N_f = N_p) = 0$

$$\text{donc } P(N_p > N_f) = \frac{1}{2}$$

. Si n est pair $P(N_f = N_p) = P(\frac{n}{2} \text{ pile}, \frac{n}{2} \text{ face})$
 $= \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2}$

de sorte que

$$P(N_p > N_f) = \frac{1 - \frac{1}{2^n} \binom{n}{n/2}}{2}.$$

Exercice 6

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \underbrace{(np)^k}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^k} \underbrace{e^{(n-k)p(1-p)}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}}$$

de sorte que $P(X_n=h) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^h e^{-\lambda}}{h!}$

On reconnaît une loi de Poisson

Ici, on a utilisé le fait

que $\log(1-x) \sim -x$

lorsque $x \rightarrow 0$

donc $n \log(1-p_n) \sim -np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\lambda$

Exercice 7. si $h \in \mathbb{N}$, $a < b \in [0, 1[$

$$\begin{aligned} 1) \quad P(LX = h \text{ et } \{X\} \in [a, b]) &= P(X \in [h+a, h+b]) \\ &= F_X(h+b) - F_X(h+a) \\ &= e^{-\lambda(h+a)} - e^{-\lambda(h+b)} = e^{-\lambda h} (e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}) \end{aligned}$$

En faisant h sur h , on obtient

$$P(\{X\} \in [a, b]) = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{1 - e^{-\lambda}}$$

En faisant $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow 1$ il vient $P(LX = h) = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda h}$

2) D'après ci-dessus, $\forall h, \forall a < b \in [0, 1[$

$$P(LX = h \text{ et } \{X\} \in [a, b]) = P(LX = h) P(\{X\} \in [a, b])$$

ie LX et $\{X\}$ sont indépendants !

Exercice 8

- 1) Les fonctions f_i sont positives par $i=1, \dots, 4$.
Par ailleurs

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} f_1(u) du = \int_a^b \frac{du}{b-a} = 1$$

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} f_2(u) du = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = \left[-e^{-\lambda u} \right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} f_4(x) du = \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_1^{\infty} = 1.$$

$$2) \text{ On a } \int_{\mathbb{R}} f_3(x) du = \int_d^{\infty} \frac{du}{u\sqrt{u}} = \int_d^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$$

Une primitive de $x^{-3/2}$ est $-2x^{-1/2}$ donc

$$\int_{\mathbb{R}} f_3(x) du = \left[-2x^{-1/2} \right]_d^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{d}}$$

f_3 est une densité si $\frac{2}{\sqrt{d}} = 1$ i.e. $d=4$.

- 3) Les fonctions de répartition F_i associées sont

$$F_i(u) = \int_{-\infty}^u f_i(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{si } u < a \\ \frac{u-a}{b-a} & \text{si } a \leq u \leq b \\ 1 & \text{si } u > b. \end{cases}$$

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^x f_2(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = \left[-e^{-\lambda s} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$F_3(x) = \int_{-\infty}^x f_3(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq h \\ \int_h^x \frac{ds}{s^{3/2}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{s}} \right]_h^x = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} & \end{cases}$$

$$F_4(x) = \int_{-\infty}^x f_4(s) ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \int_1^x \frac{ds}{s^2} = \left[-\frac{1}{s} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 9 arctan est une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi \end{aligned}$$

ie $f_X(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ est une densité de probabilité.

$$\begin{aligned} \text{on a alors } F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) - \arctan(-\infty) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Exercice 10 $T = -\frac{1}{\lambda} \log(1-U) \geq 0$ donc

$$P(T \leq t) = 0 \quad \text{pour } t < 0.$$

Pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \log(1-U) \leq t\right) \\ &= P(\log(1-U) \geq -\lambda t) \\ &= P(1-U \geq e^{-\lambda t}) \\ &= P(U \leq 1 - e^{-\lambda t}) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle $E(\lambda)$.