2. Théorème limite central (TLC)

Le théorème limite central permet de préciser la LGN.

2.1 Théorème limite central

Théorème : Soit (X_n) une suite de va i.i.d avec $\mathbb{E}[|X_i|^2] < \infty$. On pose $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$. Alors

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

de manière équivalente

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Remarque :
- Le TLC assure que la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres est $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
- La loi gaussienne joue un rôle universel ici, quelque soit la loi commune des X_i.

Avant de donner la preuve du TLC, montrons le lemme suivant.

Lemme : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| e^{ix} - \sum_{0}^{p} \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \min\left(\frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}, \frac{2|x|^p}{p!} \right).$$

Preuve du Lemme : d'après la formule de Taylor

$$e^{ix} - \sum_0^p \frac{(ix)^k}{k!} = \frac{i^{p+1}}{p!} \int_0^x (x-s)^p e^{is} ds \quad (*)$$

Ainsi : $$\left| e^{ix} - \sum_0^p \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{p!} \left| \int_0^x (x-s)^p ds \right| = \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Par ailleurs, en intégrant $(*)$ par parties

$$\left| e^{ix} - \sum_0^p \frac{(ix)^k}{k!} \right| \leq \left| \frac{i^p}{(p-1)!} \int_0^x (x-s)^{p-1} e^{is} ds - \frac{(ix)^p}{p!} \right| \leq \frac{2|x|^p}{p!}$$

$\square$

Preuve du TLC : En considérant $Z_i = \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sigma}$, on se ramène au cas où $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\mathrm{var}(X_i) = 1$.
On calcule les fonctions caractéristiques, par indépendance.

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Comme $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, φ_{X_1} est 2 fois dérivable avec

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 + t\varphi'_{X_1}(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''_{X}(0) + o(t^2)$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

D'après le Lemme vu hier comparant $|\prod a_i - \prod b_i|$ avec $a_i = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ et $b_i = \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)$ on a alors

$$\left| \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - \left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n \right| \leq n \left| \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1-\frac{t^2}{2n}\right) \right|.$$

Or d'après le lemme ci-dessus avec $p=2$

$$\left| \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 - \frac{t^2}{2n} \right| \leq \mathbb{E}\left[\min\left(\frac{t^3|X|^3}{6\, n^{3/2}}, \frac{t^2|X|^2}{n}\right)\right]$$

de sorte que

$$\left| \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - \left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n \right| \leq \mathbb{E}\left[\min\left(\frac{t^3|X|^3}{6\sqrt{n}}, t^2|X|^2\right)\right] \xrightarrow[n\infty]{\text{cv dominée.}} 0$$

Par ailleurs $\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} e^{-t^2/2}$, par conséquent

$$\left| \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-t^2/2} \right| \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

$\square$

<u>Remarque</u> : La convergence en loi étant équivalente ici à la convergence des fonctions de répartition, le TLC peut s'écrire $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right) \in [a,b]\right) \xrightarrow[n\infty]{} \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \in [a,b]\right)$$

$$= \int_a^b e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

La preuve ci-dessous s'adapte verbatim au cas où les variables X_i sont indépendantes, mais pas de même loi.

<u>Théorème</u> : Soit (X_i) des va indépendantes, de carré intégrable. On pose $\sigma_n := \sqrt{\mathrm{var}(X_1) + \dots + \mathrm{var}(X_n)}$.
Alors

$$Z_n := \frac{\sum_{1}^{n} (X_i - \mathbb{E}[X_i])}{\sigma_n} \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve : comme plus haut, par indépendance

$$\varphi_{Z_n}(t) = \prod_{1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\frac{it}{\sigma_n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])} \right] \quad \text{avec}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{it}{\sigma_n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])} \right] = 1 - \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \mathrm{var}(X_i) + o\left(\frac{t^2}{\sigma_n^2} \right).$$

D'après le lem $\left(\prod a_i - \prod b_i \right)$ on a alors

$$\left| \varphi_{Z_n}(t) - \prod_{1}^{n} \left(1 - \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \mathrm{var}(X_i) \right) \right| \leq \dots \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

et $$\prod_{1}^{n} \left(1 - \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \mathrm{var}(X_i) \right) = \exp\left(\sum_{1}^{n} \log\left(1 - \frac{t^2}{2\sigma_n^2} \mathrm{var}(X_i) \right) \right)$$

$$= \exp\left(\frac{-t^2}{2} + o(1) \right).$$

2.2 Retour sur les application de la LGN.

Méthode de Monte-Carlo

On a vu que si X_i iid et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $g(X_i) \in \mathbb{L}^1$ alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i}^{n} g(X_i) \xrightarrow[n\infty]{} \mathbb{E}[g(X_1)] = \int g(x) \, \mathbb{P}_X(dx).$$

À l'aide du TLC, on peut préciser

$$\frac{\sqrt{n}}{var(X_1)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i}^{n} g(X_i) - \mathbb{E}[g(X_1)] \right) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1)$$

i.e la vitesse de convergence dans l'approximation de $\mathbb{E}[g(X_1)]$ par $\frac{1}{n} \sum_{i}^{n} g(X_i)$ est $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Cette vitesse ne dépend pas de la régularité de g, contrairement aux vitesses obtenues avec les méthodes d'intégration type Riemann.

Estimation paramétrique

On reprend l'exemple du $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ iid vers $X_i = 1$ si vote pour A, $X_i = 0$ si vote pour B.

On a vu que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{ps, \mathbb{P}} p$.

Fixons un seuil de confiance $1-\alpha = 95\%$ par exple.
Il existe alors $\eta_\alpha = 1.96$ tq

$$\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq \eta_\alpha) \geq 1-\alpha.$$

D'après la LGN et le TLC, on a alors

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{S_n}{n}-p\right| \leq \eta_\alpha\right) \xrightarrow{n\infty} \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq \eta_\alpha) \geq 1-\alpha$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\frac{S_n}{n} - \frac{\eta_\alpha . \sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{\eta_\alpha . \sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

Comme $\sigma = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et $\eta_\alpha = 1.96 \leq 2$, on déduit

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n\infty}{\gtrsim} 1-\alpha = 95\%.$$

Autrement dit, avec 95% de chances de ne pas se tromper on peut affirmer que $p \in \left[\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]$.
La largeur de la fourchette d'erreur est $\frac{1}{\sqrt{n}}$, par exple 10^{-2} si $n = 10^4$.

L'intervalle de confiance ci-dessus est à nouveau asymptotique i.e valide lorsque $n \to +\infty$, cependant on peut à nouveau quantifier

2.3 Vitesse de convergence dans le TLC

Théorème (Berry-Esseen)

Soit (X_i) une suite de va iid avec $\mathbb{E}[|X_i|^3] < \infty$ alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right) \leq x \right) - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq x) \right| \leq C \frac{\mathbb{E}[|X_1|^3]}{\sigma^3 \sqrt{n}} .$$

où C est une constante universelle $(C \leq 3)$.

Preuve: voir DM

__Proposition__ (Δ méthode)

Si $X_n \xrightarrow{ps} c$ et $\sqrt{n}(X_n - c) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

alors si g dérivable en

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(c)\big) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, g'(c)^2 \sigma^2\big)$$

__Preuve:__ on applique Taylor

$$g(X_n) - g(c) = g'(c)(X_n - c) + o(|X_n - c|)$$

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(c)\big) = \underbrace{g'(c)\sqrt{n}(X_n - c)}_{\downarrow\ \mathcal{N}(0, g'(c)^2\sigma^2)} + \underbrace{o\big(\sqrt{n}(X_n - c)\big)}_{\downarrow\ 0}$$

S: $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{\lambda}$

d.r.l $\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{\lambda}\right) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right)$

$g = \frac{1}{x}$
$g' = -\frac{1}{x^2}$

d.r.l $\frac{n}{S_n} - \lambda \to \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2} \cdot \lambda^4\right)$

$= \mathcal{N}(0, \lambda^2)$

d.r.l $\sqrt{n}\left(\frac{n}{S_n} \cdot \frac{1}{\lambda} - 1\right) \to \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left|\frac{n}{S_n} \cdot \frac{1}{\lambda} - 1\right| \leq \eta_\alpha\right) \to 1-\alpha$

$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\lambda} - \frac{S_n}{n}\right| \leq \frac{\eta_\alpha}{\sqrt{n}} \frac{S_n}{n}\right) \to 1-\alpha$

$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\lambda} \in \left[\frac{S_n}{n}\left(1 - \frac{\eta_\alpha}{\sqrt{n}}\right), \frac{S_n}{n}\left(1 + \frac{\eta_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right]\right) \to 1-\alpha$

$= \mathbb{P}\left(\lambda \in \left[\frac{n}{S_n}\left(\frac{1}{1+\frac{\eta_\alpha}{\sqrt{n}}}\right), \frac{n}{S_n}\left(\frac{1}{1-\frac{\eta_\alpha}{\sqrt{n}}}\right)\right]\right) \to 1-\alpha$

Lemme de Slutsky

Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ constante !

alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$

⚠ Faux si c n'est pas constante !

Preuve : on passe par les fonctions caractéristiques

$$\varphi_{(X_n Y_n)}(t,s) = \mathbb{E}\left[e^{i(tX_n + sY_n)}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{itX_n} e^{isc}\right] - \mathbb{E}\left[e^{itX_n}\left(e^{isY_n} - e^{isc}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]e^{isc} + \left(\mathbb{E}\left[e^{itX_n}\right] - \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]\right)e^{isc}$$

$$- \mathbb{E}\left[e^{itX_n}\left(e^{isY_n} - e^{isc}\right)\right]$$

$$= \varphi_X(t)\,\varphi_c(s) + e^{isc}\left(\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)\right)$$

$$+ \mathbb{E}\left[e^{itX_n}\left(e^{isY_n} - e^{isc}\right)\right]$$

donc

$$\left| \varphi_{(X_n, Y_n)}(t,s) - \varphi_X(t)\varphi_c(s) \right| \leq \left| \varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t) \right| + \mathbb{E}\left[\left| e^{isY_n} - e^{isc} \right| \right]$$

$$\leq \left| \varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t) \right| + s\varepsilon + 2\mathbb{P}(|Y_n - c| > \varepsilon)$$

Application : estimation $\mathcal{P}(\lambda)$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \quad \text{var}(X) = \lambda$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{\lambda}}}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda\right) \to \mathcal{N}(0,1)$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$