

1.4 Variables aléatoires indépendantes

Définition: Sur un espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on dit que $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendantes si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

On écrit $A \perp B$ pour " A et B sont indép"

Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une collection quelconque, on dira que les A_i sont

- mutuellement indépendantes si $\forall J \subset I$ finie

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

- deux à deux indépendantes si $\forall i \neq j, A_i$ est indépendant de A_j .

Définition On dit que deux familles $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ sont indépendantes si $\forall A \in \mathcal{G}, \forall B \in \mathcal{H}$,
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Plus généralement, des familles $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ sont

- mutuellement indépendantes si $\forall J \subset I$ finie
 $\forall A_j \in \mathcal{G}_j \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

- deux à deux indépendantes si $\forall i \neq j, \mathcal{G}_i$ est indép de $\mathcal{G}_j$

Proposition : Si $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ est une collection de π -systèmes (stable par intersection) alors les $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ sont indépendantes (mutuellement ou $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$) ss: les $(\sigma(\mathcal{A}_i))_{i \in I}$ sont indépendantes (idem).

Preuve: CP TD, chose monotone.

Notation : si X est une variable aléatoire

$X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E, \mathcal{E})$, on note

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{E})$$

C'est le plus petit tribu sur Ω rendant X mesurable.

Définition : Deux variables aléatoires X et Y

$$X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E_1, \mathcal{E}_1), \quad Y: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E_2, \mathcal{E}_2)$$

définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont indépendantes si:

les tribus $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes

i.e $\forall A \in \mathcal{E}_1, \forall B \in \mathcal{E}_2$

$$P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

Plus généralement, on dira que des v.a. $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes / $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$ indép si les tribus associées $(\sigma(X_i))_{i \in I}$ le sont.

Exemple : on jette deux dés et on note X_1 et X_2 les résultats :

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\{1, \dots, 6\}^2, \mathcal{P}(\{1, \dots, 6\}^2), \text{mesure uniforme})$$

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2) , \text{ avec } \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \}$$

$$X_1(\omega) = \omega_1, \quad X_2(\omega) = \omega_2.$$

Si P uniforme

$$P(X_1 = i \text{ et } X_2 = j) = \frac{1}{36} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 6\}$$

$$\text{ainsi } P(X_1 = i) = \sum_{j=1}^6 P(X_1 = i \text{ et } X_2 = j) = \frac{1}{6},$$

$$P(X_2 = j) = \sum_{i=1}^6 P(X_1 = i \text{ et } X_2 = j) = \frac{1}{6}$$

de sorte

$$P(X_1 = i \text{ et } X_2 = j) = P(X_1 = i) P(X_2 = j) \quad \forall i, j$$

$\Rightarrow X_1$ et X_2 sont indépendantes.

Exemple : $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1]^n, \mathcal{B}([0, 1]^n), \text{Lebesgue})$

$$X : x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} \mapsto \{x_1, \dots, x_n\} \in \{0, 1\}^n.$$

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ alors les variables X_i et X_j pour $i \neq j$ sont indépendantes.

On a vu que pour P_X est la loi uniforme sur $\{0, 1\}^n$ i.e. $\forall \varepsilon_i \in \{0, 1\}$

$$P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i \text{ et } X_j = \varepsilon_j) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_j = \varepsilon_j) = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i \text{ et } X_j = \varepsilon_j) = \mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i) \mathbb{P}(X_j = \varepsilon_j).$$

On montrera ci-dessous de m qu'elles sont mutuellement indépendantes.

Proposition: Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes E_i)$ alors les variables $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ sont mutuellement indépendantes ssi $\forall A_i \subset E_i$, on a

$$\mathbb{P}_X(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbb{P}_{X_1}(A_1) \times \dots \times \mathbb{P}_{X_n}(A_n)$$

i.e. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$ est la mesure produit.

Preuve: c'est la définition :

$$\mathbb{P}_X(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbb{P}(X \in (A_1 \times \dots \times A_n))$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

$$= \mathbb{P}_{X_1}(A_1) \dots \mathbb{P}_{X_n}(A_n)$$

[on note que la mesure produit $\prod_{i=1}^n A_i$ engendre $\otimes E_i$]

Exemple: retour sur l'exemple précédent:

$$P_X \text{ uniforme } \{0,1\}^n$$
$$P_X = P_{(X_1, \dots, X_n)}, \quad P_{X_i} = \left(\frac{1}{2}; \dots; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\delta_i\right)$$

$$P_X = \bigotimes_{i=1}^n P_{X_i}$$

"Une mesure uniforme sur un produit est le produit des mesures uniformes".

2. Fonction de répartition et densité.

2.1 Fonction de répartition

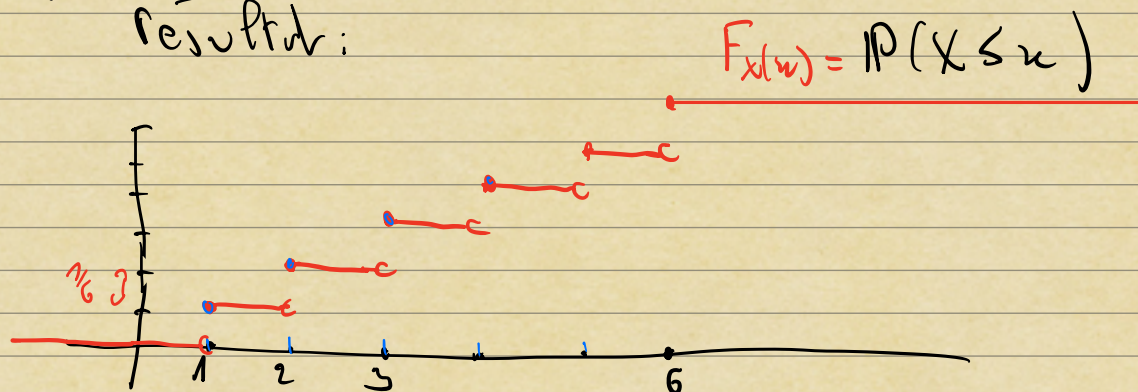
Définition: On appelle fonction de répartition d'une v.v. réelle la fonction $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

$$F_X(x) := P_X([-\infty, x]) = P(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Proposition La fonction de répartition caractérise la loi d'une v.v., au sens si $F_X = F_Y$ alors $P_X = P_Y$.

Preuve: La famille $\mathcal{A} = \{[-\infty, x], x \in \mathbb{R}\}$ est stable par intersection qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on conclut par le lemme de classe monotone.

Exemple : on trouve un dé d'un côté X le résultat :



Exemple : loi uniforme (Lebesgue sur $[0,1]$).



$$\begin{aligned} F_X(u) &= P(X \leq u) \\ &= \lambda([0, u]) = u \\ &\text{sur } [0, 1] \end{aligned}$$

Propriétés : Soit F_X la fonction de répartition d'une v.a. réelle X . Alors

- 1) F_X est croissante
- 2) $\lim_{u \rightarrow -\infty} F_X(u) = 0$, $\lim_{u \rightarrow +\infty} F_X(u) = 1$
- 3) F_X est càdlàg [continue à droite avec limite à gauche]

$$F_X(x^-) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y < x}} F_X(y) = P(X < x)$$

$$h) P(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$$

5) Si x_0 n'est pas un atome de X i.e. $P(X = x_0) = 0$ alors F_X est continue en x_0 .

Preuve: 1) Si $x \leq y$, $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$

de sorte que

$$P_x(]-\infty, x]) \leq P_x(]-\infty, y]) \quad \text{car } P_x \text{ proba}$$
$$F_x(x) \leq F_x(y).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x(]-\infty, -n])$$
$$= P_x\left(\bigcap_n]-\infty, -n]\right) = P_x(\emptyset) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x(]-\infty, n]) = P_x\left(\bigcup_n]-\infty, n]\right)$$
$$= P_x(\mathbb{R}) = 1.$$

$$3) \text{ On pose } A_n =]-\infty, x + \frac{1}{n}] \text{ de sorte}$$
$$\bigcap_n A_n =]-\infty, x]. \quad \text{et}$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} F_x(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x(A_n) = P_x\left(\bigcap_n A_n\right)$$
$$= F_x(x).$$

$$\text{On pose } B_n =]-\infty, x - \frac{1}{n}].$$

$$\bigcup_n B_n =]-\infty, x[$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y < x}} F_x(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_x(B_n) = P_x\left(\bigcup_n B_n\right)$$
$$= P_x(]-\infty, x[) \leftarrow$$
$$= F_x(x^-)$$

$$4) \text{ On a } \underbrace{P(X \leq x)}_{F_X(x)} = \underbrace{P(X < x)}_{F_X(x^-)} + P(X = x)$$

ie les points de discontinuité de F_X sont exactement les atomes.

Corollaire: Une v.v. réelle possède un nb au plus dénombrable d'atomes.

Preuve: une fonction monotone possède un nb infini dénombrable de discontinuités.

Proposition: Soit F une fonction càdlàg croissante avec $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = 1$ alors F est la fonction de répartition d'une v.v. réelle X .

Preuve: On construit X sur $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Lebesgue})$

Pour $w \in]0,1[$, on pose

$$X(w) = F^{-1}(w) := \inf \{ t \in \mathbb{R}, F(t) \geq w \}$$

• X est bien définie car $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$

i.e. $\{t \in \mathbb{R}, F(t) > 0\}$ est non vide et minoré

• X est mesurable car F est càdlàg

• On a l'équivalence

$$X(\omega) \leq x \iff \omega \leq F(x).$$

On a alors

$$P_X([-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(\omega, X(\omega) \leq x)$$

$$\stackrel{''}{=} F_X(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lebesgue sur } [0,1]}}{P(\omega, \omega \leq F(x))} = F(x).$$

Si on veut construire X sur un espace abstrait $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on utilise le th de Carathéodory.