

2.2 Notion de densité

Définition: on dit qu'une var. réelle X est à densité si sa loi P_X est à densité, i.e. il existe une fonction (mesurable) positive f_X avec $\int_{\mathbb{R}} f_X du = 1$ telle que

$$P_X(A) = \int_A f_X(u) du \quad \forall A \text{ mesurable.}$$

De façon équivalente $\forall a < b$

$$P_X([a,b]) = P(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(u) du$$

Exemple: $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \text{Lebesgue})$

$$\begin{aligned} \gamma : (\Omega, \mathcal{F}) &\rightarrow ([-1,0], \mathcal{B}([-1,0])) \\ \omega &\mapsto \omega^2 - 1 \end{aligned}$$

$$P_Y([a,b]) = P(\gamma \in [a,b]) \quad \text{si } [a,b] \subset [-1,0]$$

$$= P(\{\omega, \omega^2 - 1 \in [a,b]\})$$

$$= P(\{\omega, \omega \in [\sqrt{a+1}, \sqrt{b+1}]\})$$

$$= \sqrt{b+1} - \sqrt{a+1}$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$$

densité $f_Y(u)$

Proposition : Si X est un v.a réelle de densité f_X . Alors

1) $\forall u \in \mathbb{R}, F_X(u) = \int_{-\infty}^u f_X(t) dt.$

2) F_X est continue sur $\mathbb{R}$

3) Si f_X est continue en x_0 alors F_X est dérivable en x_0 et $F'_X(x_0) = f(x_0)$.

h) Si X a pour fonction de répartition

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^u f(t) dt \quad \text{avec } f \text{ mes. } \geq 0$$

alors X a pour densité f .

Preuve : 1) C'est la définition

$$F_X(u) = P(X \in]-\infty, u]) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^u f_X(t) dt.$$

2) La mesure de Lebesgue ne charge pas les singuliers donc P_X non plus, et d'après le cours d'Intégr F_X est continue

3) Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta < 1$ tq $\forall |h| < \delta$

* $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} |F_X(x_0+h) - F_X(x_0) - h f(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \\ &\leq \varepsilon |h|. \end{aligned}$$

d'au le résultat.

4) Si μ mesure de densité f , alors μ et $\mathbb{P}_X$ coïncident sur les ensembles $(]-\infty, x], x \in \mathbb{R})$ et donc sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : Si X est var. réelle avec F_X continue, X n'est pas nécessairement à densité.

C'est le cas si F_X est absolument continue, i.e. $\exists f$ intégrable tq $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$.

Une fonction continue, dérivable de dérivée L^1 n'est pas forcément l'intégrale de sa dérivée, cf exemple de Cantor.

Définition : Une fonction $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable est appelée densité si $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \lambda^d(dx) = 1$

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ a pour loi la loi de densité f si $\forall [a_i, b_i], a_i < b_i$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]) &= \int_{\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]} f(x) \lambda^d(dx), \\ &= \int_{\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d. \end{aligned}$$

Proposition: Soit (X, Y) un couple de v.a réelles de densité $f_{X,Y}$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors X et Y sont à densité, données par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx$$

← densités marginales.

Preuve: Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P_X(A) = P(X \in A) = P(X \in A, Y \in \mathbb{R})$$

$$= \int_{A \times \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dx dy \stackrel{\text{Fub.}}{=} \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx$$

densité de X

idem pour Y .

□

Proposition: Soit (X, Y) un couple de v.a de densité $f_{X,Y}$. Alors X et Y sont indépendantes si

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Preuve: Soit $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A \text{ et } Y \in B)$$

$$= \int_{A \times B} f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$

$$P_X(A) P_Y(B) = \int_A f_X(x) dx \cdot \int_B f_Y(y) dy = \int_{A \times B} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

$$\text{ie. } X \perp Y \Leftrightarrow \int_{A \times B} \underbrace{f_{X,Y}(x,y)}_{f_X(x) f_Y(y)} dx dy = \int_{A \times B} \underbrace{f_X(x) f_Y(y)}_{f_X(x) f_Y(y)} dx dy \quad \forall A, B$$

$$\text{ie } f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

□

Plus généralement, si $X = (X_1, \dots, X_d)$ est une densité
alors, les X_i sont mutuellement indépendantes

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_i f_{X_i}$$

3 Variables aléatoires usuelles

3.1 Variables aléatoires discrètes

- On dit qu'une v.a. X est une v.a. de Bernoulli:
de paramètre $p \in [0,1]$ si: $X(\Omega) = \{0,1\}$
ou plus généralement un ensemble à 2 points

et $IP(X=0) = 1-p$, $IP(X=1) = p$,

On notera $X \sim B(p)$

- On dit X suit la loi Binomiale de param n et p
 $X \sim B(n, p)$ si: $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$

$$IP(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- On dit X suit une loi géométrique de param $p \in]0, 1]$
si: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$IP(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

- On dit que X suit une loi de Poisson de param $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si
 $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$IP(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

- On dit que X suit une loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ si: $IP(X=x_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i=1, \dots, n$

$$\text{i.e.} \quad IP(X \in A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

3.2 Variables aléatoires à densité.

- On dit que X est uniforme dans $[a, b]$ et on note $X \sim U_{[a, b]}$ si P_X est à densité

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a, b]}(x)$$

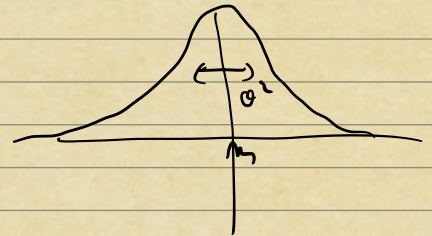
- On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et X a une densité

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$$

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}.$$

- On dit que X suit la loi normale ou gaussienne de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in [0, \infty]$ et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si $X(\Omega) \in \mathbb{R}$ et X a pour densité

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$



- On dit que X suit une loi $\Gamma(m, \lambda)$ si $X(\Omega) \in \mathbb{R}^+$ et
- $$f_X(x) = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} e^{-\lambda x} x^{m-1} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

- On dit que X suit la loi de Cauchy de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ si $X(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2}.$$

Exercice si temps

Si $X \sim \mathcal{P}(n, p)$, $Y \sim \mathcal{P}(m, p)$ $\perp$

loi de $X+Y$?

idem pour Poisson.