

Espérance et moments

1. Espérance et moments

[On commence par rappeler la formule de transfert.
Soit $\varphi: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ mesurable
Si μ mesure sur $(X, \mathcal{F})$ alors la mesure image par φ est $\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{G}$.
Si $h: (Y, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable alors
 h est ν -intégrable ss $h \circ \varphi$ est μ -intégrable
$$\int_X h \circ \varphi(x) \mu(dx) = \int_Y h(y) \nu(dy).]$$

1.1 Espérance : définition et premières propriétés

Définition : Si $X: (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une v.a. réelle, on dit que X est intégrable (ou P -intégrable) si :

$$\int_{\Omega} |X(\omega)| P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} |x| P_X(dx) < \infty.$$

Définition : On définit l'espérance d'une v.a. réelle X , positive ou intégrable, que l'on note $E[X]$, comme

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P_X(dx).$$

Plus généralement, si P mesurable avec $\underline{P(x)} \geq 0$
 ou $\underline{P(x)}$ P -intégrable, on a

$$\mathbb{E}[\underline{P(x)}] = \int_{\Omega} P(X(\omega)) IP(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} P(u) IP_X(du).$$

Si: $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 mesurable

$$\mathbb{E}[P(X_1, \dots, X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} P(x) IP_{(X_1, \dots, X_n)}(dx_1, \dots, dx_n).$$

Remarque: Les intégrales ci-dessus sont à considérer
 au sens du Lebesgue

• Si: $X = \mathbb{1}_A$, $\mathbb{E}[X] = IP(A)$

• Si: $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ $a_i \geq 0$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n a_i IP(A_i)$

• Si: $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X] = \sup \{ \mathbb{E}[Y], Y \text{ déj. } \geq 0, Y \leq X \}$

• Si: $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$

Concrètement:

• Si: X est discrète $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$
 et $IP(X = x_i) = p_i \in [0, 1]$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i IP(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$\mathbb{E}[P(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) p_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) IP(X = x_i)$$

Exemple : si $X \sim \mathcal{B}(p)$ $\left| \begin{array}{l} P(X=0) = 1-p \\ P(X=1) = p \end{array} \right.$

$$E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$\begin{aligned} E[\cos(\pi X)] &= \cos(\pi \cdot 0) P(X=0) + \cos(\pi \cdot 1) P(X=1) \\ &= 1 \cdot (1-p) + (-1) p \\ &= 1 - 2p \end{aligned}$$

Exemple : si $X \sim \mathcal{U}_{[1..6]}$ $P(X=h) = \frac{1}{6}$ pour $h \in [1..6]$

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + \dots + 6 \cdot P(X=6) \\ &= \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Exemple : si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $P(X=h) = p(1-p)^{h-1}$ pour $h \geq 1$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{h \geq 1} h \cdot P(X=h) = \sum_{h \geq 1} h \cdot p(1-p)^{h-1} \\ &= p \sum_{h=1}^{+\infty} h(1-p)^{h-1} = p \sum_{h=0}^{+\infty} h(1-p)^{h-1} \end{aligned}$$

Or $\sum_{h=0}^{+\infty} (1-p)^h = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$ donc

$$\sum_{h=0}^{+\infty} h(1-p)^h = - \left(\sum_{h=0}^{+\infty} (1-p)^h \right)' = \frac{1}{p^2} \text{ i.e. } E[X] = \frac{1}{p}.$$

- Si X est à densité $f_X(u)$

$$E[X] = \int x f_X(u) du \quad \left| \rightarrow P_X(du) = f_X(u) du \right.$$

$$E[h(X)] = \int h(u) f_X(u) du$$

Exemple: si $X \sim U(a,b)$ ie de densité $f_X = \frac{1}{b-a} \frac{1}{\mathbb{I}_{[a,b]}}$

$$\begin{aligned} \text{alors } E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(u) du = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{b-a} \frac{1}{\mathbb{I}_{[a,b]}}(u) du \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x du = \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_a^b = \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2} ! \end{aligned}$$

Exemple: si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ ie de densité $f_X(u) = \lambda e^{-\lambda u} \frac{1}{\mathbb{I}_{u \geq 0}}$

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(u) du = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda u} du$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[x (-e^{-\lambda x}) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-\lambda x}) du$$

$$\begin{aligned} &= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} . \end{aligned}$$

Définition: Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire avec $E[|X_i|] < \infty$ pour $i=1, \dots, n$ alors on définit $E[X] := (E[X_1], \dots, E[X_n])$.
On dit X est centré si $E[X_i] = 0 \quad \forall i$.

Proposition: Si X et Y sont deux v.a. réelles (positives ou intégrables)

- 1) Si $X \leq Y$ p.s. alors $E[X] \leq E[Y]$.
- 2) $\forall \lambda, \mu, E[\lambda X + \mu Y] = \lambda E[X] + \mu E[Y]$
- 3) $|E[X]| \leq E[|X|]$
- 4) Si $X \geq 0$ p.s. et $E[X] = 0$ alors $X = 0$ p.s.

Preuve: Cf cours d'intégration $\square$

Remarque: L'espérance n'est autre qu'une intégrale par rapport à IP donc les théorèmes classiques s'appliquent

• convergence monotone

Si $X_n \nearrow X$ suite positive alors

$$E\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n].$$

- Fatou: $S: X_n \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$$

- cv dominée.

$$S: X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \text{ et } |X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \text{ avec } Y \text{ intégrable}$$

alors

$$\mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$$

" $\mathbb{E}[X]$

Proposition: (inégalité de Markov)

S: $t > 0$, alors

$$\mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}.$$

Preuve: $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E} \left[|X| \mathbb{1}_{|X| > t} \right] + \mathbb{E} \left[|X| \mathbb{1}_{|X| \leq t} \right]$

$\underbrace{\mathbb{E} \left[|X| \mathbb{1}_{|X| > t} \right]}_{\geq t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{|X| > t} \right] = t \mathbb{P}(|X| > t)} + \underbrace{\mathbb{E} \left[|X| \mathbb{1}_{|X| \leq t} \right]}_{\geq 0}$

i.e. $\mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}.$

variante: si: $\mathbb{E}[e^{\lambda|X|}] < \infty$ pour $\lambda > 0$.

$$\mathbb{P}(|X| > t) = \mathbb{P}(e^{\lambda|X|} > e^{\lambda t})$$
$$\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda|X|}]}{e^{\lambda t}}$$

□

Proposition: (Inégalité de Jensen)

Soit X une variable réelle, φ une fonction convexe telle que X et $\varphi(X)$ sont intégrables

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X]).$$

par ex: $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$ ←

Preuve: $\varphi(x) = \sup \{f(x), f \text{ affine}, f \leq \varphi\}$

et conclut par positivité et linéarité de l'espérance. □

Proposition: Soit X une variable positive, alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt.$$

Si $X(\omega) \in \mathbb{N}$ alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$

Preuve: D'après Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt &= \int_0^\infty \mathbb{E} \left[\frac{1}{X > t} \right] dt = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \frac{1}{X > t} dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^X dt \right] = \mathbb{E}[X]. \quad \square \end{aligned}$$

1.2 Moments d'ordre supérieurs

Définition: on dit qu'un v.a. réelle admet un moment d'ordre $p > 0$ si

$$\mathbb{E}[|X|^p] = \int_{\Omega} |X(\omega)|^p \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} |x|^p \mathbb{P}_X(dx) < \infty.$$

[On écrit $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ et on note

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace des v.a. admettant un moment d'ordre p [on identifie les variables aléatoires qui sont égales p.s., ou encore qui coïncident en dehors d'un ensemble $\mathbb{P}$ -négligeable]

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left\{ X, \text{ t.q. } \exists c > 0 \text{ t.q. } \mathbb{P}(|X| > c) = 0 \right\}$$

Les inégalités classiques vu en intégration "s'étendent" dans ce cadre probabiliste.

Cauchy-Schwarz et Hölder

Si $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $X \in L^p$, $Y \in L^q$

$$\begin{aligned}\|XY\|_1 &= E[|XY|] \leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}} E[|Y|^q]^{\frac{1}{q}} \\ &= \|X\|_p \cdot \|Y\|_q.\end{aligned}$$

en particulier si $p = 2$

$$E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2] E[Y^2]}$$

Minkowski

Si $p > 1$, $X, Y \in L^p$

$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Définition : Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variance de X est

$$\rightarrow \text{var}(X) := E[|X - E[X]|^2] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0.$$

C'est l'écart quadratique à la moyenne.

L'écart type est $\sqrt{\text{var}(X)} = \|X - E(X)\|_2$

Si $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit la covariance comme $\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))] \in \mathbb{R}$
c'est la version polarisée de la variance.

Propriétés: on a

1) $\text{var}(X) \geq 0$.

2) $\text{var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{var}(X)$.

3) $\text{var}(X + a) = \text{var}(X)$ si $a \in \mathbb{R}$.

4) $\text{var}(X) = 0 \Rightarrow X$ est constante p.s
 $X = \mathbb{E}[X]$ p.s

5) $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$.

Proposition: (inégalité de Tchebychev)

Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $t > 0$ alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > t) \leq \frac{\text{var}(X)}{t^2}.$$

Preuve: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > t) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 > t^2)$
 $\leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^2]}{t^2} = \frac{\text{var}(X)}{t^2}$ $\square$

1.3 Moments des variables aléatoires

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, i.e. $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$.

$$E[X] = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p.$$

$$E[X^2] = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) = p$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

- Si $X \sim U_{\{x_1, \dots, x_m\}}$ alors

$$E(X) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \quad \text{moyenne arithmétique.}$$

- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$E[X] = np, \quad \text{var}(X) = np(1-p).$$

- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}.$$

$$\text{var}(X) = \dots$$

- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda.$$

$$\text{var}(X) = \dots = \lambda.$$

• S: $X \sim U_{[a,b]}$, $E[X] = \frac{a+b}{2}$.

$$\text{var}(X) \dots$$

• S: $X \sim E(\lambda)$, $f_{X|n} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$.

$$E[X] = \int x f_{X|n} dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-e^{-\lambda x} \cdot x \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

• S: $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$E[X] = m$$

$$\text{var}(X) = \sigma^2$$

• Si $X \sim \text{Cauchy}(1)$ i.e. $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$,

$$E[|X|] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2} dx = +\infty!$$