2. Espérance et identification de lois

2.1 Identification via des fonctions test.

<u>Théorème</u> : Soit X une vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. et μ une mesure de prob. sur $\mathbb{R}^d$. Alors $X \sim \mu$ ssi $\forall h$ continue à support compact ≥ 0 (ou C^∞ support compact ≥ 0)

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\, \mu(dx).$$

<u>Preuve</u> : il y a un sens évident, si $\mathbb{P}_X = \mu$ on a bien $\forall h$

$$(*) \quad \mathbb{E}[h(X)] = \int h(x)\, \mathbb{P}_X(dx) = \int h(x)\, \mu(dx).$$

<u>Réciproquement</u> : si $\forall h \in C_c^0 \geq 0$, on a $(*)$, fixons K compact de $\mathbb{R}^d$ et posons $O_n = \{x,\ d(x,K) < \frac{1}{n}\}$. et

$$h_n(x) := \frac{d(x, O_n^c)}{d(x,K) + d(x, O_n^c)} \leq 1$$

Alors la suite h_n est une suite $\searrow$ de fonctions $C_c^0 \geq 0$

$$\mathbb{1}_K \leq h_n(x) \leq \mathbb{1}_{O_n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} h_n = \mathbb{1}_K$$

Par cv dominée ou monotone, on a alors

$$\mathbb{P}_X(K) = \lim_{n\infty} \int h_n(x)\, \mathbb{P}_X(dx) \overset{*}{=} \lim_{n\infty} \int h_n(x)\, \mu(dx) = \mu(K)$$

ie $\mathbb{P}_X = \mu$.

<u>Exemple</u>: Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, quelle est la loi de X^2 ?

$$\mathbb{E}[h(X^2)] = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}^+} h(x^2) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\underset{\substack{y = x^2 \\ \sqrt{y} = x \\ \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} h(y) \underbrace{\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{dy}{\sqrt{y}}}$$

Cela montre que X^2 a une densité f_Y

$$f_Y(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{u}{2}} \mathbb{1}_{u>0}.$$

<u>Exemple</u>: Soit $X \sim \mathcal{C}(1)$ $f_X = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

quelle est la loi de $1/X$?

$$\mathbb{E}[h(\tfrac{1}{X})] = \int_{\mathbb{R}} h(\tfrac{1}{x}) \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} h\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\pi(1+x^2)} + \int_{\mathbb{R}^-} h\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$$

$$\underset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} h(y) \frac{dy}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} \cdot \frac{1}{y^2} + \int \dots$$

$dx = -\frac{dy}{y^2}$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} h(y) \frac{dy}{\pi(1+y^2)} + \int_{\mathbb{R}^-} h(y) \frac{dy}{\pi(1+y^2)}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(y) \frac{dy}{\pi(1+y^2)} .$$

<u>Exemple</u> : Soit $U \sim \mathcal{U}_{[-\pi,\pi]}$ i.e. $f_U(x) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)$

Quelle est la loi de $\tan(U)$

$$\mathbb{E}[h(\tan U)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(\tan x)\, dx$$

$$\underset{y=\tan(x)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \frac{dy}{1+y^2}$$

$\arctan y = x$

$\frac{dy}{1+y^2} = dx$

i.e. $\tan(U) \sim \mathcal{C}(1)$.

[Ce théorème utilisant les fonctions tests est bien utile pour caractériser une loi.

<u>Exemple</u> : Soit $X \sim \text{Cauchy}(1)$, on aimerait connaître la loi de $Y = X^+ = X \mathbb{1}_{X>0}$.

Soit h une fonction test :

$$\mathbb{E}[h(Y)] = \mathbb{E}[h(X^+)] = \int_{\mathbb{R}} h(x^+) \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$$

$$= h(0)\, \mathbb{P}(X \leq 0) + \int_0^\infty h(x) \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot h(0) + \int_0^\infty h(x) \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$$

Par conséquent $\mathbb{P}_Y = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{\pi(1+x^2)} \mathbb{1}_{x>0}\, dx$.]

2.2 <u>Espérance et indépendance</u>

<u>Proposition</u> : Soit $X = (X_1 \dots X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Il y a équivalence entre :

i) les variables (X_i) sont mutuellement indépendantes

ii) pour toutes fonctions mesurables bornées (ou positives, ou intégrables) $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[h_1(X_1) \dots h_n(X_n)] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[h_i(X_i)].$$

<u>Preuve</u> :

i) ⇒ ii) On a vu que les (X_i) sont mutuellement indép ssi $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.

Soient alors h_i mesurables bornées

$$\mathbb{E}[h_1(X_1) \dots h_n(X_n)] = \int h_1(x_1) \dots h_n(x_n)\, \mathbb{P}_X(dx_1 \dots dx_n)$$

$$= \int h_1(x_1) \dots h_n(x_n)\, \mathbb{P}_{X_1}(dx_1) \dots \mathbb{P}_{X_n}(dx_n)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int h_1(x_1)\, \mathbb{P}_{X_1}(dx_1) \times \dots \times \int h_n(x_n)\, \mathbb{P}_{X_n}(dx_n)$$

$$= \mathbb{E}[h_1(X_1)] \times \dots \times \mathbb{E}[h_n(X_n)]. \quad (*)$$

ii) ⇒ i) Réciproquement si $(*)$ est vrai $\forall h_i$ mesurables bornées, en prenant $h_i = \mathbb{1}_{A_i}$ il vient

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}(X_1) \dots \mathbb{1}_{A_n}(X_n)]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_1}(X_1)] \times \dots \times \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n}(X_n)]$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in A_n) \quad \square$$

<u>Corollaire</u> : Soient X, Y des va $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indépendantes alors $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ et $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

⚠ La réciproque est fausse ! Cf contre ex plus bas.

Preuve: On rappelle que

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}(X)\right)\left(Y-\mathbb{E}(Y)\right)\right].$$

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y).$$

Si $X \perp Y$ d'après ci-dessus

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[X-\mathbb{E}(X)\right] \times \mathbb{E}\left[Y-\mathbb{E}(Y)\right]$$

$$= 0 \times 0 = 0.$$

Exemple: Si $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes alors

$$Y = \sum_1^n X_i \sim \mathcal{B}(n,p).$$

Alors $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_1^n X_i\right] = \sum_1^n \mathbb{E}[X_i] = n.p.$

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}\left(\sum_1^n X_i\right) \stackrel{\perp}{=} \sum_1^n \mathrm{var}(X_i) = n\,p(1-p).$$

Contre exemple: soit $U \sim \mathcal{U}_{[-1,1]}$ et $V = U^2$.

alors $\mathbb{E}[U] = 0$,

$$\mathbb{E}[V] = \int_{-1}^{1} u^2\,du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbb{E}\left[\left(U-\mathbb{E}[U]\right)\left(V-\mathbb{E}(V)\right)\right] = \mathbb{E}\left[U\left(U^2-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}[U^3] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[U] = 0$$

Mais U et V ne sont pas indépendantes, par ex

$$0 = \mathbb{P}\left(|U| < \frac{1}{2}, V > \frac{1}{2}\right) \neq \mathbb{P}\left(|U| < \frac{1}{2}\right)\mathbb{P}\left(V > \frac{1}{2}\right) > 0.$$