3. Transformées exponentielles

3.1 Fonction caractéristique

Définition : Soit $X = (X_1, \dots, X_d) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire. On définit sa fonction caractéristique $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ comme

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i t.X}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i \sum_{k=1}^{d} t_k X_k}\right].$$

Remarque : • φ_X est toujours bien définie car $|e^{itX}| \leq 1$ donc e^{itX} est intégrable.

• $$\varphi_X(t) = \int e^{itx} \, \mathbb{P}_X(dx)$$

ie φ_X est la transformée de Fourier de la mesure $\mathbb{P}_X$

Exemple : • si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors

$$\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = e^{it.0}\,\mathbb{P}(X=0) + e^{it.1}\,\mathbb{P}(X=1)$$
$$= (1-p) + p\,e^{it}.$$

• Soit U_λ de densité $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}$ sur $\mathbb{R}$ (Laplace)

$$\mathbb{E}\left[e^{itU_\lambda}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|} \, du = \frac{\lambda}{\lambda - it} + \frac{\lambda}{\lambda + it} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}.$$

En particulier $\varphi_{U_1}(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (Cauchy au $\frac{1}{\pi}$ près)

Théorème : La fonction caractéristique caractérise la loi,

ie si $\varphi_X = \varphi_Y$ alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Preuve 1 : Le théorème découle de la formule d'inversion de Fourier. On a de fait $\mathbb{P}_X = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_X)$ donc si $\varphi_X = \varphi_Y$

$\mathbb{P}_X = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_X) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_Y) = \mathbb{P}_Y$.

Preuve 2 : Soit X une va de loi $\mathbb{P}_X$ et U une variable indépendante de loi Laplace(λ) ie $\varphi_U(\lambda t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Soit $h \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par convergence dominée

$$h(x) = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} h(x - \lambda t) \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} h(x - \lambda t)\, \mathbb{E}\left[e^{i\lambda t U_\lambda}\right] dt$$

Toujours par convergence dominée et par Fubini

$$\mathbb{E}[h(X)] = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X - \lambda t)]\, \mathbb{E}\left[e^{i\lambda t U_\lambda}\right] dt$$

$$\stackrel{\perp}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[h(X - \lambda t)\, e^{i\lambda t U_\lambda}\right] dt$$

$\lambda t = s$
$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[h(X - s)\, e^{is U_\lambda}\right] \frac{ds}{\lambda}$$

$X - s = v$
$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[h(v)\, e^{i(X-v)U_\lambda}\right] \frac{ds}{\lambda}$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathbb{R}} h(v) \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{i(X-v)U_\lambda}\right]}_{= \mathbb{E}\left[e^{-ivU_\lambda} \varphi_X(U_\lambda)\right]} \frac{dv}{\lambda}$$

$\leftarrow$ ne dépend de X que via φ_X

Ainsi, si $\varphi_X = \varphi_Y$, on a $\forall h \in C_c$
$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[h(Y)].$$

Comme on l'a vu dans le cours précédent, cela permet d'affirmer que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. $\square$

__Proposition__ : Soit X un vecteur aléatoire et φ_X sa fonction caractéristique, alors

1) $|\varphi_X(t)| \leq 1$
2) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
3) $\varphi_X(0) = 1$
4) φ_X est uniformément continue
5) φ_X est de type positif ie

$$\forall n, \forall t_1 \ldots t_n \in \mathbb{R}^d, \forall z_1 \ldots z_n \in \mathbb{C} \qquad (*)$$
$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi_X(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} \geq 0.$$

__Preuve__ : 1) 2) 3) OK

4) $$\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i(t+\frac{h}{2}).X}\left(e^{i\frac{h}{2}X} - e^{-i\frac{h}{2}X}\right)\right]$$
$$= 2i\, \mathbb{E}\left[e^{i(t+\frac{h}{2})X} \sin\left(\frac{h.X}{2}\right)\right] \quad \text{donc}$$

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq 2\, \mathbb{E}\left[\left|\sin\left(\frac{h.X}{2}\right)\right|\right] \leq \underbrace{\mathbb{E}[2 \wedge |h||X|]}_{\substack{\to 0 \\ \text{indep de } t.}}$$

5) On remarque que

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi_X(t_k - t_j) z_k \overline{z_j} = \mathbb{E}\left[\left|\sum_{1}^{n} e^{it_k X} z_k\right|^2\right] \geq 0.$$

Théorème : Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire, alors les $(X_i)_{i=1..n}$ sont mutuellement indépendantes ssi :

$$\varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t_k) \qquad \forall t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve : On a vu que les (X_i) sont indep ssi :

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$$

Ainsi comme les fonctions caractéristiques caractérisent les lois,

$$(X_i) \text{ indep} \iff \varphi_X = \varphi_{\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}}.$$

Or

$$\varphi_{\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n} \, \mathbb{P}_{X_1}(dx_1) \ldots \mathbb{P}_{X_n}(dx_n)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{i t_k x_k} \, \mathbb{P}_{X_k}(dx_k) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t_k). \qquad \square$$

Proposition : Si X et Y sont des variables indép, alors

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Si $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(X+Y)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX} e^{itY}\right]$$

$$\overset{\perp}{=} \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t). \qquad \square$$

Proposition : Si X un va réelle de fct caractéristique φ_X.

- Si $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ alors φ_X est de classe C^p et $\forall k \leq p$

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \, \mathbb{E}[X^k].$$

- Réciproquement si φ_X est p fois dérivable en zéro alors $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ pour $k \leq 2\lfloor p/2 \rfloor$.

<u>Preuve</u> : • Si $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ alors $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ $\forall k \leq p$.

Alors pour $\omega \in \Omega$, $\psi(t) = e^{itX(\omega)}$ est C^∞

avec $\psi^{(k)}(t) = (iX(\omega))^k e^{itX(\omega)}$ de sorte que

$$|\psi^{(k)}(t)| \leq |X(\omega)|^k \in \mathbb{L}^1$$

Par le théorème de dérivation sous le signe somme

On déduit que $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\psi(t)]$ est C^k $\forall k \leq p$

avec $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \, \mathbb{E}[X^k]$.

• Réciproquement, supposons que φ_X est p fois dérivable en zéro. Montrons par récurrence que $X \in \mathbb{L}^{2k}$ pour $k \leq [p/2]$.

- pour $k=0$, c'est évident !

- supposons que pour un $k < [p/2]$ on ait $X \in \mathbb{L}^{2k}$.

d'après ci-dessus φ_X est C^{2k} avec

$$\varphi_X^{(2k)}(t) = (-1)^k \, \mathbb{E}[X^{2k} e^{itX}].$$

Comme $k < [p/2]$, $k+1 \leq [p/2]$

et $2k+2 \leq 2[p/2] \leq p$. donc $\varphi_X \in C^{2k+2}$

$$\varphi_X^{2k+2}(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi_X^{(2k)}(\varepsilon) + \varphi_X^{(2k)}(-\varepsilon) - 2\varphi_X^{(2k)}(0)}{\varepsilon^2}$$

$$= (-1)^k \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\frac{e^{i\varepsilon X} + e^{-i\varepsilon X} - 2}{\varepsilon^2} X^{2k}\right]$$

$$= (-1)^{k+1} \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\sin(\varepsilon X/2)}{\varepsilon X/2}\right)^2 X^{2k+2}\right]$$

Par Fatou, on a alors

$$\mathbb{E}[X^{2k+2}] = \mathbb{E}\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon X}{2}\right)}{\varepsilon X/2}\right)^2 X^{2k+2}\right]$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon X}{2}\right)}{\varepsilon X/2}\right)^2 X^{2k+2}\right]$$

$$= (-1)^{k+1} \varphi_X^{(2k+2)}(0) < \infty. \qquad \square$$

<u>Exemples</u>: • Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

$$\varphi_X'(t) = \frac{\lambda i}{(\lambda - it)^2} \to \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\varphi_X''(t) = -\frac{2\lambda}{(\lambda - it)^3} \to \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

donc $\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

• Si $S_m \sim \mathcal{B}(m,p)$ alors $S_m = \sum_1^m X_i$ avec $X_i \perp \sim \mathcal{B}(p)$

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\sum X_i}\right] \overset{\perp}{=} \mathbb{E}\left[e^{itX_1}\right]^n = \left((1-p) + pe^{it}\right)^n$$

En dérivant:

$$\varphi_{S_n}'(t) = n\left(1-p+pe^{it}\right)^{n-1} ipe^{it}$$

$$\varphi_{S_n}''(t) = n(n-1)\left(1-p+pe^{it}\right)^{n-2}\left(-p^2e^{2it}\right) + n\left(1-p+pe^{it}\right)^{n-1}\left(-pe^{it}\right)$$

En particulier $\mathbb{E}[S_n] = np$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = n(n-1)p^2 + np$

et l'on retrouve bien $\operatorname{var}(S_n) = np(1-p)$.

3.2 Exemple de calculs de fonctions caractéristiques

On a vu $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{P}(\lambda)$

- Calcul $\mathcal{B}(n,p)$
- Somme de Poisson

- $\mathcal{G}eo(p)$
- uniforme
- expo
- somme d'expo
- gaussienne avec EDO