Convergence de variables aléatoires

1. Différents modes de convergence

On commence par énoncer/rappeler le lemme de Borel-Cantelli:

<u>Lemme</u> : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de proba et (A_n) une suite d'évènements. Alors

- Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\infty}} A_n) = 0$
- Si les (A_n) sont mutuellement indépendants et $\sum_1^\infty \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ alors $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\infty}} A_n) = 1$

<u>Preuve</u> : On rappelle que $\overline{\lim_{n\infty}} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{\text{decroissant en } n}$

Ainsi: $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\infty}} A_n) = \lim_{n\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k)$.

- Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

donc $\mathbb{P}(\overline{\lim_{n\infty}} A_n) = 0$

- Réciproquement, si les (A_i) sont mutuellement indép, alors

$$\mathbb{P}((\overline{\lim_{n\infty}} A_n)^c) = \mathbb{P}(\underline{\lim_{n\infty}} A_n^c) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0} \underbrace{\bigcap_{k\geq n} A_k^c}_{\text{croissant en } n})$$

$$= \lim_{n\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = \lim_{n\infty} \prod_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k^c)$$

$$= \lim_{n\infty} \prod_{k\geq n} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

On $\log \prod_{k\geq n} (1-\mathbb{P}(A_k)) = \sum_{k\geq n} \log(1-\mathbb{P}(A_k))$

$\log(1-x) \leq -x$ si $x \in [0,1]$

$$\leq -\sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) = -\infty$$

$\square$.

1.1 Convergence presque sûre

<u>Définition</u> : On dit qu'une suite (X_n) de v.a converge presque sûrement vers une v.a X et on note $X_n \xrightarrow[n\infty]{p.s} X$ si

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega,\ \lim_{n\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

<u>Remarque</u> : • l'ensemble

$A = \{\omega,\ \lim X_n(\omega) = X(\omega)\}$ est bien mesurable car il s'écrit :

$$A = \bigcap_{p\geq 1} \underbrace{\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \left\{|X_k(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{p}\right\}}_{\text{décroissant en } p}$$

• Par monotonie, on a alors :

$$X_n \xrightarrow{p.s} X \iff \forall p\geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} |X_k - X| \leq \frac{1}{p}\right) = 1$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} |X_k - X| \leq \varepsilon\right) = 1$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\underline{\lim}_{n\infty} |X_n - X| \leq \varepsilon\right) = 1$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\infty} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

Corollaire : Soit (X_n), X des variables aléatoires.

- Si $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{p.s.} X$

- Si les (X_n) sont mutuellement indép alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\sum \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$.

Preuve : • pour le premier point c'est le premier point du lemme de Borel-Cantelli.

- pour le second point, c'est encore Borel-Cantelli. On note qu'il est nécessaire de supposer $X = 0$ car sinon les $(X_n - X)$ ne sont pas indép.

Proposition : Soit $X_n \xrightarrow[n\infty]{p.s.} X$ et f une fonction continue alors $f(X_n) \xrightarrow[n\infty]{p.s.} f(X)$.

Preuve : par continuité de f, $f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))$ dès lors que $X_n(\omega) \to X(\omega)$, ainsi : $\mathbb{P}(\lim_{n\infty} f(X_n) = f(X)) \geq \mathbb{P}(\lim_{\infty} X_n = X) = 1$.

1.2 Convergence en probabilité

Définition : On dit que (X_n) converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

<u>Proposition</u> (unicité de la limite)

Si $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X$ et $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} Y$ alors $X = Y$ p.s

<u>Preuve</u> : pour $p \geq 1$, on remarque que

$$\left\{ |X-Y| > \frac{1}{p} \right\} \subset \left\{ |X_n - X| > \frac{1}{2p} \right\} \cup \left\{ |X_n - Y| > \frac{1}{2p} \right\}$$

de sorte que

$$\mathbb{P}\left(|X-Y| > \frac{1}{p}\right) \leq \underbrace{\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \frac{1}{2p}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} 0} + \underbrace{\mathbb{P}\left(|X_n - Y| > \frac{1}{2p}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$$

ie $\mathbb{P}\left(|X-Y| > \frac{1}{p}\right) = 0 \quad \forall p \geq 1$. Par suite

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{p \geq 1} |X-Y| > \frac{1}{p}\right) = 0.$$

<u>Proposition</u> : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et f est continue alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.

<u>Preuve</u>: f est uniformement continue sur les compacts.

Soit $\varepsilon > 0$, $a > 0$. $\exists \eta$ tq $|x| \leq a$, $|x-y| < \eta$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ainsi en passant au complementaire

$$\left\{ |f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ |X| \geq a \right\} \cup \left\{ |X_n - X| > \eta \right\}$$

et

$$\overline{\lim_{n\infty}}\, \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X| \geq a) + \underbrace{\overline{\lim_{n\infty}}\, \mathbb{P}(|X_n - X| > \eta)}_{= 0}$$

En faisant tendre $a \to +\infty$, il vient

$$\overline{\lim_{n\infty}}\, \mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) = 0 \qquad \square.$$

Remarque Si on pose $d_{\mathbb{P}}(X,Y) = \mathbb{E}[|X-Y| \wedge 1]$ alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X \iff d_{\mathbb{P}}(X_n, X) \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Autrement dit, la distance $d_{\mathbb{P}}$ métrise la convergence en proba. L'espace $(\mathbb{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), d_{\mathbb{P}})$ est un espace métrique complet.

1.3 Convergence $\mathbb{L}^p$

Définition : Soit $p \geq 1$. On dit que (X_n) converge dans $\mathbb{L}^p$ vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{L}^p} X$ si $\|X_n - X\|_p \xrightarrow[n\infty]{} 0$ ie

$$\lim_{n\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Remarque : par l'inégalité de Hölder si $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{L}^p} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^q} X$ pour $q < p$.

1.4 Convergence en loi

Définition : On dit que (X_n) converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$ si $\forall f$ continue bornée

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)].$$

Remarque cela revient à dire que $\mathbb{P}_{X_n}$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_X$. La convergence en loi concerne "les lois" des variables et seulement leur loi !

Lemme (Portemanteau)

On a équivalence entre

1) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

2) $\forall F$ fermé $\quad \overline{\lim\limits_{n\infty}}\ \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$

3) $\forall O$ ouvert $\quad \underline{\lim\limits_{n\infty}}\ \mathbb{P}(X_n \in O) \geq \mathbb{P}(X \in O)$

4) $\forall B$ borélien tq $\mathbb{P}(X \in \overline{B} \setminus \mathring{B}) = 0$, $\lim\limits_{n\infty} \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$

__Preuve :__

- 1) $\Rightarrow$ 2) Si F fermé, on considère $f_k(x) = \dfrac{1}{(1+d(x,F))^k}$

  continue bornée par 1 avec $f_k \searrow \mathbb{1}_F$. Alors

$$\overline{\lim}\ \mathbb{P}(X_n \in F) = \overline{\lim} \int \mathbb{1}_F(x)\, \mathbb{P}_{X_n}(dx) \leq \overline{\lim} \int f_k(x)\, \mathbb{P}_{X_n}(x)$$

$$\mathbb{P}(X \in F) \xleftarrow[k\infty]{} \mathbb{E}[f_k(X)] \overset{1)}{=} \overline{\lim}\ \mathbb{E}[f_k(X_n)]$$

- 2) $\Rightarrow$ 3) par passage au complémentaire

- 2)+3) $\Rightarrow$ 4) On a $\mathring{B} \subset B \subset \overline{B}$ de sorte que

$$\mathbb{P}(X \in \mathring{B}) \leq \underline{\lim}\ \mathbb{P}(X_n \in \mathring{B}) \leq \underline{\lim}\ \mathbb{P}(X_n \in B) \leq \overline{\lim}\ \mathbb{P}(X_n \in B)$$
$$\leq \overline{\lim}\ \mathbb{P}(X_n \in \overline{B}) \leq \mathbb{P}(X \in \overline{B})$$

  Si $\mathbb{P}(X \in \overline{B} \setminus \mathring{B}) = 0$, on a $\mathbb{P}(X \in B) = \underline{\lim}\ \mathbb{P}(X_n \in B) = \overline{\lim}\ \mathbb{P}(X_n \in B)$.

- 4) $\Rightarrow$ 1) Soit f continue bornée, quitte à translater/dilater

  on peut supposer que $0 \leq f \leq 1$. Alors $\quad a \leq f \leq b$, $\quad 0 \leq \dfrac{f-a}{b-a} \leq 1$

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^1 \mathbb{P}(f(X) > t)\, dt$$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^1 \mathbb{P}(f(X_n) > t)\, dt$$

$X \in f^{-1}(]t, +\infty[)$

$$\mathbb{P}(f(X)>t) = \mathbb{P}(X \in \underbrace{f^{-1}(]t,+\infty[)}_{B})$$

$$\overline{B} \setminus \mathring{B} = \overline{f^{-1}(]t,+\infty[)} \setminus f^{-1}(]t,+\infty[)$$

$\mathbb{P}(X \in \overline{B}\setminus\mathring{B}) \leq \mathbb{P}(f(X)=t) = 0$ sauf pour un ensemble D_0 au plus dénombrable de t.

- De même $\mathbb{P}(X_n \in \overline{B}\setminus\mathring{B}) = 0$ sauf pour un ensemble D_n au plus dénombrable de t.

- Ainsi $\bigcup_{n\geq 0} D_n$ est au plus dénombrable et pour $t \notin \bigcup_{n\geq 1} D_n$

$$\mathbb{P}(f(X_n)>t) \xrightarrow{n\infty} \mathbb{P}(f(X)>t).$$

Par convergence dominée on a alors

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)].$$

$\square$]