<u>Proposition</u> : soit (X_n) une suite de va réelles alors
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $F_{X_n}(t) \underset{\infty}{\longrightarrow} F_X(t)$ en tout pt de continuité de F_X

<u>Preuve</u> : • D'après le lemme de Portemanteau, si $B = \mathbb{1}_{]-\infty, t]}$
si F_X est continue en t alors $\mathbb{P}(X \in \bar{B} \setminus \mathring{B}) = \mathbb{P}(X = t) = 0$.
Alors si X_n converge en loi, $\underset{F_{X_n}(t)}{\underset{\parallel}{\mathbb{P}(X_n \in B)}} \to \underset{F_X(t)}{\underset{\parallel}{\mathbb{P}(X \in B)}}$

• Réciproquement, supposons que $F_{X_n} \to F_X$ par les pt de C^0.
Soit $f \in C^\infty$ à support compact. Alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)\, dt = \int f'(t) \mathbb{1}_{]-\infty, x]}(t)\, dt$$

Par Fubini, on obtient

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int f'(t)\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{]-\infty, X]}(t)]\, dt$$
$$= \int f'(t) [1 - F_X(t)]\, dt$$

Comme l'ensemble des pt de discontinuité de F_X est au plus dénombrable, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ on a $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ et par convergence dominée

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)].$$

On conclut par densité de C_c^∞ dans C_c^0.

<u>Théorème</u> : La suite (X_n) converge en loi vers une v.a. X ssi : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_{X_n}(t) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \varphi_X(t)$.

<u>Preuve</u> : • Le sens direct est immédiat car $x \mapsto e^{itx}$ est continue bornée.

• Pour la réciproque, soit g C^2 à support compact. Alors $\hat{g}(t) = \int e^{itx} g(x)\,dx$ est $\mathbb{L}^1$.

En effet $\hat{g}$ bornée et $\hat{g''}(t)$ aussi et comme

$\hat{g''}(t) = t^2 \hat{g}(t)$ on déduit que $\hat{g}(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en l'infini et donc $\hat{g} \in \mathbb{L}^1$. Par inversion de Fourier, on a

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \hat{g}(t)\,dt.$$

Comme g intégrable, par Fubini

$$\mathbb{E}[g(X_n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-itX_n}]\,\hat{g}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_n}(-t)\,\hat{g}(t)\,dt.$$

Par convergence dominée on conclut que

$$\mathbb{E}[g(X_n)] \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[g(X)].$$

On conclut par densité de C_c^2 dans C_b.
[On passe de C_c^2 à C_c^0 puis de C_c^0 à C^0 par troncation]. $\square$

Théorème : Soit (φ_{X_n}) une suite de fonction caractéristiques qui converge ponctuellement vers φ continue en zéro. Alors φ est une fct caractéristique $\varphi = \varphi_X$ et $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$.

Preuve : voir poly JC Breton.

Théorème (Continuous Mapping Theorem).

Soit $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$ et f continue $\mathbb{P}_X$ p.s alors

$$f(X_n) \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} f(X)$$

Preuve :
- Si f est continue et h continue bornée alors $h \circ f$ est continue bornée de sorte que $\mathbb{E}[h \circ f(X_n)] \to \mathbb{E}[h \circ f(X)]$ ie $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$
- Si f est seulement continue $\mathbb{P}_X$ p.s on utilise le lemme de Portemanteau

2. Articulation des modes de convergences

2.1 Convergence p.s et en proba.

Lemme : Si $X_n \xrightarrow[n\infty]{p.s} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X$.

<u>Preuve</u> : On a vu que $X_n \xrightarrow[n\infty]{p.s} X$ ssi $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\infty}} \, |X_n - X| > \varepsilon \right) = 0.$$

ie $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq 0} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon}_{\text{décroissant en } n} \Big) = 0.$$

ie $$\lim_{n\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon \Big) = 0$$

de sorte que $\lim_{n\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$

ie $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X$.

<u>Lemme</u> : Si $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X$ alors il existe une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $X_{n_k} \xrightarrow[k\infty]{p.s} X$.

<u>Preuve</u> : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit n_k le plus petit entier tq $\mathbb{P}(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}) \leq 2^{-k}$.
Par le lemme de Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{k\infty}} \, |X_{n_k} - X| > \frac{1}{k} \right) = 0$$

ie pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\exists\, k_0(\omega)$ tq $\forall k \geq k_0(\omega)$ $|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}$ donc $X_{n_k} \xrightarrow{p.s} X$. $\square$.

2.2 Convergence $\mathbb{L}^p$, p.s et proba.

Lemme : Si $X_n \xrightarrow[n\infty]{p.s} X$ et $|X_n| \leq Y \in \mathbb{L}^1$ alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{L}^1} X$.

Preuve : c'est la convergence dominée ! $\square$

Lemme : Si $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{L}^p} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, par l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|]}{\varepsilon} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Définition : On dit que famille de v.a $(X_i)_{i\in I}$ est uniformt intégrable (U.I) si

$$\lim_{m\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|>m}\right] = 0$$

Exemple : si (X_i) est bornée dans $\mathbb{L}^p$ avec $p>1$ alors

ie $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|^p] < \infty$ alors par l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|>m}\right] \leq \mathbb{E}[|X_i|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{P}(|X_i|>m)^{1/q}$$

$$\leq \left(\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|^p]^{\frac{1}{p}}\right) \left(\frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{m}\right)^{1/q}$$

$$\leq \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|^p]^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|]\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \frac{1}{m^{1/q}}$$

$$\xrightarrow[m\infty]{} 0 \text{ unif. en } i \in I.$$

Exemple : Si $|X_i| < Y$ avec $Y \in \mathbb{L}^1$ alors

$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}\left[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|>m}\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y| \mathbb{1}_{|Y|>m}\right] \xrightarrow[m\infty]{\text{cv dominée}} 0$$

Proposition : La famille $(X_i)_{i\in I}$ est U.I ssi :

- $(X_i)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathbb{L}^1$ ie $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|] < \infty$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0$ tq si $\mathbb{P}(A) < \delta$ alors
$$\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_A] < \varepsilon.$$

Preuve : voir TD

Proposition : Soit (X_n) une suite de v.a intégrables. Alors il y a équivalence entre

1) $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X$

2) $(X_n)_{n\geq 1}$ est U.I et $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathbb{P}} X$.

Preuve :

1) => 2) On a vu que $X_n \xrightarrow{\mathbb{L}^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Il reste à voir que (X_n) est U.I. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \gg 1$ tq $\forall n \geq n_0 \quad \mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \varepsilon/2$. Alors si $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A].$$
$$\leq \quad \varepsilon/2 \quad + \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A]$$

Comme $(|X|)$ est U.I, $\exists \eta$ tq $\mathbb{P}(A) < \eta \Rightarrow \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] < \varepsilon/2$ alors
$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_A] \leq \varepsilon \quad \text{ie} \quad (X_n) \text{ est U.I}$$

2) => 1) Comme $X_n \xrightarrow[n\infty]{P} X$, on peut extraire une ss suite

tq $X_{n_k} \xrightarrow[k\infty]{p.s} X$. D'après le Lemme de Fatou, on a

$$\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[\liminf_{k\infty} |X_{n_k}|] \leq \liminf_{k\infty} \mathbb{E}[|X_{n_k}|] < \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$$

donc $X \in \mathbb{L}^1$. Pour $\varepsilon > 0$, on a alors

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}] + \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}]$$

$$\leq \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}] + \varepsilon.$$

$$\leq \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}] + \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}] + \varepsilon$$

Comme $(X_n) \cup (X)$ est U.I et que $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

il existe n assez grand de sorte que

$\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq 3\varepsilon$ i.e $X_n \xrightarrow[\infty]{\mathbb{L}^1} X$.

2.3 Convergence en Proba et autres modes

Lemme : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $X_n \xrightarrow[n\infty]{\mathcal{L}} X$.

Preuve : Soit $t \in \mathbb{R}$ alors pour $\varepsilon \ll 1$

$$|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| = |\mathbb{E}[e^{itX_n}] - \mathbb{E}[e^{itX}]|$$

$$\leq |t|\, \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 2]$$

$$= |t|\, \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| < \varepsilon}] + 2|t|\, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

$$\leq |t|\varepsilon + 2|t|\, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$

Ainsi $\overline{\lim_{n\infty}} |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \leq |t|\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$. $\square$

Corollaire : Si $X_n \xrightarrow[n\infty]{p.s,\, L^p,\, \mathbb{P}} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Lemme : si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ constante alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon)$$

$$\leq F_{X_n}(c - \varepsilon) + 1 - F_{X_n}(c + \varepsilon).$$

$$\downarrow n\infty \qquad\qquad \downarrow n\infty$$

$$F_c(c - \varepsilon) + 1 - F_c(c + \varepsilon) = 0$$

car $F_c(t) = \mathbb{1}_{[c, +\infty[}(t)$ continue en $c - \varepsilon$ et $c + \varepsilon$.