

FEUILLE D'EXERCICES # 1

Exercice 1 Opérations ensemblistes

Soient A , B et C trois événements. Écrire les événements suivants, en utilisant les opérations ensemblistes d'intersection, de réunion, de différence symétrique et de passage au complémentaire. Illustrer chaque résultat par un diagramme en patates.

1. Aucun des événements A , B et C ne se réalise.
2. Au moins un des événements A ou B se réalise.
3. Exactement un des événements A ou B se réalise.
4. Au moins deux des événements A , B , C se réalisent.
5. Exactement un des événements A , B , C ne se réalise pas.

Exercice 2 Manipulation de fonction indicatrices

Soient A , B , C des parties d'un ensemble Ω . On rappelle que $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice telle que $\mathbb{1}_A(x)$ vaut 1 si $x \in \Omega$ est dans A et 0 sinon.

1. Écrire $\mathbb{1}_{A \cap B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Écrire $\mathbb{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A \cap B}$.
3. Écrire $\mathbb{1}_{A \setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
4. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(B_n)_{n \geq 1}$ sont des suites croissante et décroissante respectivement, montrer que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \mathbb{1}_{A_n}, \quad \mathbb{1}_{\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \downarrow \mathbb{1}_{B_n}.$$

Exercice 3 Tribu engendrée

Montrer si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est une famille de tribus sur un espace Ω , alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est encore une tribu sur Ω . Soit $A \subset \Omega$ un sous-ensemble de Ω . D'après ci-dessus, l'intersection des tribus sur Ω qui contiennent A est une tribu, on l'appelle tribu engendrée par A et on la note $\sigma(A)$.

Exercice 4 Exemple de tribu engendrée

Soit l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ muni de la tribu des parties $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Déterminer la tribu engendrée $\sigma(\{A, B, C\})$, où $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \emptyset$.
2. Cette tribu diffère-t-elle de $\sigma(\{A, B\})$?
3. Que rajouter par exemple à $\{A, B, C\}$ pour que la tribu engendrée soit $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier ?

Exercice 5 ★ Tribu engendrée et partition

Soit Ω un ensemble et $A_1, \dots, A_n$ une partition de Ω , i.e. $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$. Montrer que

$$\sigma(A_1, \dots, A_n) = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j, J \subset \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Exercice 6 *Vrai ou faux ?*

Les énoncés suivants sont-ils vrais pour tous événements A et B et tous les espaces de probabilité ?

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c \cap B)$
3. $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
4. $\mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c)$
5. $0 < \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$
6. $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \cup B)$
7. $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(A \cap B)$
8. $A \cap (A \cup B)^c = \emptyset$
9. $A \Delta B = A^c \Delta B^c$ (on rappelle que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$)

Exercice 7 *Lancer de dés*

On lance deux dés équilibrés. Après avoir modélisé cette expérience, déterminer la probabilité des événements suivants.

1. Les deux dés donnent le même résultat.
2. Le résultat d'au moins un dé est strictement supérieur à 4.
3. La somme des résultats est strictement supérieure à 8.
4. À supposer que l'on ne s'intéresse qu'à la somme des résultats obtenus, proposer un nouveau modèle probabiliste de cette expérience.

Exercice 8 *Six et double six*

1. Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois six en lançant quatre dés usuels, ou bien d'obtenir au moins une fois un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés usuels ?
2. On lance n fois de suite deux dés normaux. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double six ? Pour quelles valeurs de n cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$?

Exercice 9 ★ *Formule du crible*

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille d'événements. On rappelle que $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. Montrer que l'on a la relation

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Plus généralement, montrer que l'on a la formule suivante, appelée formule du crible

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right).$$

Exercice 10 ★★ *Mismatch !*

Un facteur distribue au hasard n lettres dans n boîtes en déposant une lettre et une seule dans chaque boîte. On s'intéresse à la probabilité p_n qu'aucune lettre ne parvienne à son destinataire.

1. Modéliser cette expérience aléatoire en explicitant un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2. Déterminer p_n à l'aide de la formule du crible.
3. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_n$.