

## FEUILLE D'EXERCICES # 1.5

### Exercice 1 ★ *Tribus images*

Soient  $X$  et  $Y$  des ensembles et  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ .

1. Montrer que si  $\mathcal{G}$  est une tribu sur  $Y$ ,  $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(G), G \in \mathcal{G}\}$  est une tribu sur  $X$ .
2. Montrer que si  $\mathcal{F}$  est une tribu sur  $X$ ,  $\mathcal{G} := \{A \subset Y, f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$  est une tribu sur  $Y$ .
3. Montrer que pour toute partie  $\mathcal{C} \subset Y$ , on a  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ .

### Exercice 2 ★ *Classes monotones et tribus*

1. Une union de tribus est-elle une tribu ? Une union croissante de tribus est-elle une tribu ? Si non, donner un/des contre-exemples.
2. Montrer qu'une classe monotone  $\mathcal{M}$  est une tribu si et seulement si c'est un  $\pi$ -système, i.e. ssi  $\mathcal{M}$  est stable par intersection.
3. Établir le **lemme des classes monotones**, qui stipule que si  $\mathcal{A}$  est une famille d'ensembles stable par intersection, alors la classe monotone engendrée par  $\mathcal{A}$  (intersection des classes monotones qui contiennent  $\mathcal{A}$ ) coïncide avec la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$ .

### Exercice 3 ★ *Anticipation sur la notion d'indépendance*

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilités. On dit que deux événements  $A, B \in \mathcal{F}$  sont indépendants si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ . Plus généralement, on dit que deux familles  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  d'événements sont indépendantes si pour tout  $A \in \mathcal{G}$  et  $B \in \mathcal{H}$ ,  $A$  et  $B$  sont indépendants.

1. Soit  $\mathcal{A}$  est une famille d'ensembles stable par intersection finie et indépendante d'une tribu  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ , montrer que la tribu engendrée  $\sigma(\mathcal{A})$  est encore indépendante de la tribu  $\mathcal{G}$ .
2. Soient  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  des familles d'événements stables par intersection. Montrer que les deux familles  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$  sont indépendantes si et seulement si les tribus  $\sigma(\mathcal{G})$  et  $\sigma(\mathcal{H})$  qu'elles engendrent sont indépendantes.
3. Montrer par un exemple que l'hypothèse de stabilité par intersection est nécessaire.

### Exercice 4 ★ *Version fonctionnelle du lemme de classes monotones*

Soit  $H$  un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur un ensemble  $\Omega$  et soit  $\mathcal{E}$  un  $\pi$ -système contenant  $\Omega$ . On suppose que

1.  $\forall A \in \mathcal{E}, 1_A \in H$ ,
2. Si  $(f_n)_{n \geq 0}$  est une suite croissante de fonctions positives de  $H$  convergeant vers une fonction  $f$  bornée, alors  $f \in H$ .

Montrer que  $H$  contient toutes les fonctions  $\sigma(\mathcal{E})$ -mesurables.