

FEUILLE D'EXERCICES # 2

Exercice 1 *Vrai ou faux ?*

Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

1. Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux tribus sur un ensemble Ω . Alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu.
2. Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux tribus sur un ensemble Ω . Alors $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est une tribu.
3. Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un ensemble Ω .
Alors $\{A \times B; A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur $\Omega \times \Omega$.
4. Soit $(A_n; n \in \mathbb{N})$ une suite d'événements. Alors $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=9}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.
5. Soit $(A_n; n \in \mathbb{N})$ une suite d'événements. Alors $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=9}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.
6. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
7. $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.
8. Soit $(A_n; n \in \mathbb{N})$ une suite décroissante d'événements.
Alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$
9. Soit $(A_n; n \in \mathbb{N})$ une suite croissante d'événements.
Alors $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 2 *Passage au complémentaire*

Soit $(A_n; n \in \mathbb{N})$ une suite d'événements. Montrer que

1. $(\bigcup_n A_n)^c = \bigcap_n A_n^c$ et $(\bigcap_n A_n)^c = \bigcup_n A_n^c$.
2. $(\limsup_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$ et $(\liminf_n A_n)^c = \limsup_n A_n^c$.

Exercice 3 *Convergence monotone pour les probabilités*

Soient un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty[$ une application additive, autrement dit $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ lorsque $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B = \emptyset$, telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{P}$ est une probabilité, i.e. elle est σ -additive.
2. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites croissantes :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

3. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes :

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

4. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes vers $\emptyset$:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Exercice 4 ★ *liminf/limsup de suites et d'ensembles*

On s'intéresse ici au lien entre les définitions de liminf et limsup pour les suites numériques et pour les ensembles. On rappelle que si $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombre réels, on définit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n := \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n := \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k.$$

Pour une suite d'ensembles $(A_n)_{n \geq 1}$, on a vu que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Montrer que si (A_n) est une suite d'ensembles alors on a les identités fonctionnelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\overline{\lim} A_n}.$$

Exercice 5 ★★ *Approximation diophantienne*

On considère l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \mathbb{P})$ où $\mathcal{B}([0, 1])$ est la tribu (dite borélienne) engendrée par les intervalles et $\mathbb{P}$ est la loi uniforme, i.e. pour tout $a < b \in [0, 1]$, $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$. On fixe $\varepsilon > 0$ et pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n = \left\{ \omega \in [0, 1] : \exists k \in [0, n] \cap \mathbb{N}, \left| \omega - \frac{k}{n} \right| < \frac{1}{n^{2+\varepsilon}} \right\}.$$

Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\limsup_n A_n)$. Interpréter ce résultat en terme d'approximation des nombres réels par les rationnels.

Exercice 6 ★ *Autour du lemme de Borel–Cantelli*

Soit $(A_n; n \in \mathbb{N})$ une suite d'événements.

1. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un événement A tel que d'une part $\mathbb{P}(A) \geq 1 - \varepsilon$ et d'autre part $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap A) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.
2. Réciproquement montrer que si $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un événement A tel que $\mathbb{P}(A) \geq 1 - \varepsilon$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n \cap A) < \infty$.
Indication : on a que $1 = \mathbb{P}(\liminf A_n^c) = \lim_n \mathbb{P}(\cap_{k \geq n} A_k^c)$.

Exercice 7 ★ *Reproduction*

On modélise l'évolution d'une population d'hermaphrodite. Pour simplifier, on suppose que les individus sont éternels. A l'instant 0, la population compte 2 individus. Pour tout $n \geq 1$, à l'instant n , la population compte $n + 2$ individus, et un couple d'individus choisi uniformément au hasard fait un enfant, ce qui augmente la population de 1 individu.

Soit A_n l'événement : “les deux premiers individus font un enfant à l'instant n ”. Montrer que, presque sûrement, le couple formé par les deux premiers individus ne fait plus d'enfant à partir d'un certain temps.