

FEUILLE D'EXERCICES # 2

Exercice 1 *Lancer de dés*

On lance deux dés équilibrés et indépendants.

1. Modéliser cette expérience à l'aide d'un espace de probabilité.
2. On note X la somme des deux résultats obtenus. Déterminer les valeurs possibles de X .
3. Déterminer la loi de X .
4. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = 7)$, $\mathbb{P}(X \geq 10)$, $\mathbb{P}(X \text{ est pair})$.

On considère à présent la nouvelle variable aléatoire $Y := |X - 7|$.

5. Quelles sont les valeurs possibles de Y ?
6. Déterminer la loi de Y .
7. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et $\mathbb{P}(Y = 1)$.

Exercice 2 *Maximum de deux dés*

On lance à nouveau deux dés équilibrés et indépendants. On note X cette fois le plus grand des deux résultats obtenus.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Pour $k \in \{1, \dots, 6\}$, calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$.
3. En déduire la loi de X .
4. Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$ et $\mathbb{P}(X \geq 4)$.

Exercice 3 *Minimum de deux dés et transformation*

On lance à nouveau deux dés équilibrés et indépendants. On note cette fois X le plus petit des deux résultats obtenus.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de la variable $Y := 7 - X$,

Exercice 4 *Produit de deux dés*

On lance (encore et toujours) deux dés équilibrés et indépendants. On note X le produit des deux résultats obtenus.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 6)$, $\mathbb{P}(X = 12)$.
3. Déterminer la loi complète de X .
4. Calculer $\mathbb{P}(X \text{ est pair})$.

Exercice 5 *Valeur absolue*

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

x	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$

et soit Y la variable aléatoire définie par $Y := |X|$.

1. Déterminer les valeurs possibles de Y .
2. Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$
3. Calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.
4. En déduire la loi de Y .
5. Quelle est la loi de Y^2 ?

Exercice 6 *Pile ou face et loi binomiale*

On lance n fois de suite une pièce équilibrée.

1. Expliciter un espace de probabilité permettant de modéliser cette expérience.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir k "pile" exactement, pour $0 \leq k \leq n$?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de "pile" que de "face" ?

Exercice 7 ★ *Loi des évènements rares*

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, i.e. pour $0 \leq k \leq n$

$$\mathbb{P}_{X_n}(\{k\}) = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

On suppose que la suite p_n tend vers zéro de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times p_n = \lambda > 0$. Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$. Quelle est la loi limite ?

Exercice 8 ★ *Autour du lemme de Borel–Cantelli*

Sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une suite d'évènements $(A_n)_{n \geq 1}$ tels que $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n^2}$. Justifier le fait que presque sûrement, i.e. avec probabilité un, seul un nombre fini d'évènements parmi les A_n se réalisent.