Feuille d'exercices # 3

Exercice 1 *Vrai ou faux ?*

Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

1. Un événement ne peut pas être indépendant de lui-même.
2. Deux événements disjoints sont indépendants.
3. Deux événements disjoints ne peuvent pas être indépendants.
4. Trois événements A, B, C deux à deux indépendants sont aussi mutuellement indépendant.
5. Si A et B sont deux événements, chacun indépendant d'un autre événement C, alors $A \cap B$ est aussi indépendant de C.

Exercice 2 *Indépendance*

Est-ce que parmi les familles ayant 3 enfants, les deux événements suivants sont indépendants :

- A : la famille a à la fois des filles et des gaçons
- B : la famille a au plus une fille.

Même question pour les familles de 4 enfants.

Exercice 3 *Mesurabilité et tribu triviale*

Montrer qu'une application $X : \Omega \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ sur Ω si et seulement si elle est constante.

Exercice 4 ⋆ *Produit eulérien*

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(X = n) := \frac{1}{n^s\, \zeta(s)}, \quad \text{avec } s > 1, \text{ et } \zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Pour $k \geq 1$, on désigne par E_k l'événement "k divise X". Montrer que
$$\mathbb{P}_X(E_k) = \frac{1}{k^s}.$$
2. Si $(p_i)_{i=1}^n$ sont des nombres premiers distincts, montrer que les événements E_{p_i} sont indépendants :
$$\mathbb{P}_X\left(\bigcap_{i=1}^n E_{p_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(E_{p_i}\right).$$
3. En déduire la représentation en produit eulérien de la fonction Zeta
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Exercice 5 *Pile ou face et loi binomiale*

On lance n fois de suite une pièce équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir k "pile" exactement, pour $0 \leq k \leq n$?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de "pile" que de "face" ?

Exercice 6 *Loi des évènements rares*

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, i.e. pour $0 \leq k \leq n$

$$\mathbb{P}_{X_n}(\{k\}) = \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

On suppose que la suite p_n tend vers zéro de sorte que $\lim_{n\to+\infty} n \times p_n = \lambda > 0$. Déterminer la limite $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$. Quelle est la loi limite ?

Exercice 7 *Parties entières et fractionnaires d'une exponentielle*

Soit X une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. X est une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ et de la partie fractionnaire $\{X\} := X - \lfloor X \rfloor$.
2. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 *Densité de probabilités*

Pour $a < b$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, on considère les fonctions réelles suivantes

$$f_1(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \qquad f_2(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[\alpha,+\infty[}(x), \qquad f_4(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x).$$

1. Montrer que les fonctions f_1, f_2 et f_4 sont des densités de probabilités.
2. Pour quelle valeur de α la fonction f_3 est-elle une densité de probabilité ?
3. Quelles sont les fonctions de répartition associées ?

Exercice 9 *Loi de Cauchy*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$, où $a > 0$. Déterminer pour quelle valeur de a la fonction f est une densité de probabilité. Quelle est la fonction de répartition associée ?

Exercice 10 *Variable exponentielle*

Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable $T = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U)$, où $\lambda > 0$.