

FEUILLE D'EXERCICES # 3

Exercice 1 *Vrai ou faux ?*

Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

1. Un événement ne peut pas être indépendant de lui-même.
2. Deux événements disjoints sont indépendants.
3. Deux événements disjoints ne peuvent pas être indépendants.
4. Trois événements A, B, C deux à deux indépendants sont aussi mutuellement indépendants.
5. Si A et B sont deux événements, chacun indépendant d'un autre événement C , alors $A \cap B$ est aussi indépendant de C .

Exercice 2 *Sur l'indépendance*

On lance deux dés équilibrés et indépendants. On considère alors les trois événements suivants :

$A = \{\text{le premier dé donne un nombre pair}\},$

$B = \{\text{la somme des deux dés est paire}\},$

$C = \{\text{le deuxième dé donne un nombre pair}\}.$

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Les événements A et C sont-ils indépendants ?
3. Les événements A, B et C sont-ils indépendants ?

Exercice 3 *Indépendance encore*

On lance à nouveaux deux dés équilibrés et indépendants. On note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second dé.

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Les variables X et $X + Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 *Fonction de répartition*

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

1. Vérifier que F_X est une fonction de répartition.
2. Quelle est la loi de X ?
3. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition F_Y . En déduire la loi de Y .

Exercice 5 *Parties entières et fractionnaires d'une exponentielle*

Soit X une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. X est une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ et de la partie fractionnaire $\{X\} := X - \lfloor X \rfloor$.
2. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 *Exemple de fonction de répartition*

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut

$$F_X(t) = (1 + e^{-t})^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. La variable X admet-elle une densité f_X ? Si oui, explicitez cette densité.
3. On définit de nouvelles variables en posant $U := e^X$, $V := \mathbf{1}_{\{0 < X < \log(2)\}}$ et $W := X \mathbf{1}_{\{0 < X < 1\}}$. Déterminer les lois des variables U, V et W .

Exercice 7 *Variable exponentielle*

Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition de la variable $T = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U)$, où $\lambda > 0$. En déduire sa loi (le titre donne un indice!).

Exercice 8 ★ *Propriété d'absence de mémoire*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{N}^*$) vérifie la propriété d'absence de mémoire si

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t), \quad \forall s, t \geq 0$$

et respectivement

$$\mathbb{P}(X > k + \ell) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(X > \ell), \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.
2. Montrer que si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ i.e. $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.