

FEUILLE D'EXERCICES # 3

Exercice 1 *Vrai ou faux ?*

Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

1. Un événement ne peut pas être indépendant de lui-même.
2. Deux événements disjoints sont indépendants.
3. Deux événements disjoints ne peuvent pas être indépendants.
4. Trois événements A, B, C deux à deux indépendants sont aussi mutuellement indépendants.
5. Si A et B sont deux événements, chacun indépendant d'un autre événement C , alors $A \cap B$ est aussi indépendant de C .

Exercice 2 *Mesurabilité et tribu triviale*

Montrer qu'une application $X : \Omega \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ sur Ω si et seulement si elle est constante.

Exercice 3 *★ Produit eulérien*

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(X = n) := \frac{1}{n^s \zeta(s)}, \quad \text{avec } s > 1, \text{ et } \zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Pour $k \geq 1$, on désigne par E_k l'événement " k divise X ". Montrer que

$$\mathbb{P}_X(E_k) = \frac{1}{k^s}.$$

2. Si $(p_i)_{i=1}^n$ sont des nombres premiers distincts, montrer que les événements E_{p_i} sont indépendants :

$$\mathbb{P}_X \left(\bigcap_{i=1}^n E_{p_i} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(E_{p_i}).$$

3. En déduire la représentation en produit eulérien de la fonction Zeta $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$.

Exercice 4 *Parties entières et fractionnaires d'une exponentielle*

Soit X une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. X est une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ et de la partie fractionnaire $\{X\} := X - \lfloor X \rfloor$.
2. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 *Exemple de fonction de répartition*

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut

$$F_X(t) = (1 + e^{-t})^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. La variable X admet-elle une densité f_X ? Si oui, explicitez cette densité.
3. On définit de nouvelles variables en posant $U := e^X$, $V := \mathbf{1}_{\{0 < X < \log(2)\}}$ et $W := X \mathbf{1}_{\{0 < X < 1\}}$. Déterminer les lois des variables U, V et W .

Exercice 6 *Variable exponentielle*

Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme dans l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer la fonction de répartition de la variable $T = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U)$, où $\lambda > 0$. En déduire sa loi (le titre donne un indice!).

Exercice 7 *Min et max de variables indépendantes*

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On désigne par F leur fonction de répartition commune. Déterminer les fonctions de répartitions de $m_n = \min_{i=1 \dots n} X_i$ et $M_n = \max_{i=1 \dots n} X_i$. Dans le cas où les X_i sont de loi uniforme dans $[0, 1]$, si on pose $Z_n := n \times m_n$, que dire de la fonction de répartition F_{Z_n} lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 8 ★ *Propriété d'absence de mémoire*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{N}^*$) vérifie la propriété d'absence de mémoire si

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t), \quad \forall s, t \geq 0$$

et respectivement

$$\mathbb{P}(X > k + \ell) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(X > \ell), \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.
2. Montrer que si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ i.e. $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.