

FEUILLE D'EXERCICES # 5

Exercice 1 *Vrai ou faux ?*

Soient X , Y , et $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires intégrables. Les énoncés suivants sont-ils vrais ?

1. $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[\sum_{n \geq 1} X_n] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[X_n]$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\min(n, |X|)] = \mathbb{E}[|X|]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\sin(X/n)] = 0$.
3. $\mathbb{E}[X^4] > \mathbb{E}[X^2]^2$, $\mathbb{E}[X^4] \geq \mathbb{E}[X^2]^2$, $\mathbb{E}[e^Y] \geq \exp(\mathbb{E}[Y])$.

Exercice 2 *Minimisation*

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Montrer que la quantité $\mathbb{E}[(X - a)^2]$ est minimale pour $a = \mathbb{E}[X]$.

Exercice 3 *Partie entière et inverse d'une variable uniforme*

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$ et $X := \lfloor \frac{1}{U} \rfloor$ la partie entière de son inverse.

1. Déterminer la loi de X .
2. La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

Exercice 4 *Fonction de répartition, densité et espérance*

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire $X := \frac{1}{1+U}$.
2. Montrer que X admet une densité f_X et l'expliciter.
3. Calculer les premiers moments $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$.

Exercice 5 ★ *Ponctualité*

Deux personnes se donnent rendez-vous entre 10h et 12h. On suppose que l'heure d'arrivée de chaque personne peut être modélisée par une variable aléatoire de loi uniforme sur $[10, 12]$ et que leurs heures d'arrivée sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que le premier arrivé attende plus d'un quart d'heure ?
2. Quel est le temps moyen d'attente du premier arrivé au lieu de rendez-vous ?

Exercice 6 *Quelques calculs explicites d'espérances*

Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[|X|]$, $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[e^{itX}]$ dans les cas suivants :

1. $X \sim U_{[-1,1]}$ i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)dx$.
2. $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0} dx$, pour $\lambda > 0$.
3. $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(\{k\}) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Moyenne des inverses

Soient X et Y deux variables aléatoires, la première de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$, i.e. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$; la seconde de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ autrement dit $\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ pour $k \geq 0$.

1. Calculer $\mathbb{E}[1/X]$
2. Déterminer $\mathbb{E}[1/Y]$ et $\mathbb{E}[1/(Y+1)]$.

Exercice 8 Variance d'une somme

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbb{E}[\|X\|^2] < +\infty$ où $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

1. Montrer que $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ est de carré intégrable.
2. Établir la formule

$$\text{var}(Y) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

Exercice 9 Moments de la gaussienne

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on note $m_k = \mathbb{E}[X^k]$ son $k^{\text{ième}}$ moment.

1. Justifier que les moments impairs de X sont nuls.
2. Via une intégration par parties, montrer que les moments pairs vérifient la formule de récurrence $m_{2k} = (2k-1)m_{2k-2}$ et conclure que $m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.

Exercice 10 Identification de loi

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $(x, y) \mapsto c e^{-x} \mathbf{1}_{0 < |y| < x}$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. Quelle est la loi du vecteur $(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2})$?

Exercice 11 ★ Moments et loi

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la densité f_Y de $Y = e^X$ et calculer les moments $\mathbb{E}[Y^n]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On considère la famille de variables aléatoires $(Y_a, |a| \leq 1)$, dont les densités sont données par

$$f_{Y_a}(x) = f_Y(x)(1 + a \sin(2\pi \ln(x))), \quad x > 0.$$

Calculer les moments $\mathbb{E}[Y_a^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire une conclusion intéressante.

Exercice 12 Vers la loi des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables indépendantes, toutes de moyenne nulle et de variance égale à 1. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

1. Déterminer la moyenne et la variance de S_n .
2. À l'aide de l'inégalité de Markov/Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}(|S_n/n| > \varepsilon)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.