

FEUILLE D'EXERCICES # 6

Exercice 1 *Couple de variables indépendantes*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que $\frac{1}{(1+u^2)}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u)$ est une densité de $U = Y/X$.

Exercice 2 *Lois Gamma*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois gamma de paramètres respectifs (α, λ) et (β, λ) .

1. Déterminer la densité conjointe des variables aléatoires $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$. En déduire les lois de U et V .
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
3. Que vaut l'espérance de V ? sa variance ?

Exercice 3 *Indépendantes ?*

Soient X et Y deux variables aléatoires i.i.d. de densité

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{I}_{]1,+\infty[}(x).$$

On pose $U = XY$ et $V = X/Y$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer les lois marginales de (U, V) .
4. Déterminer les probabilités $P[U \leq 2]$ et $P[2U + V \leq 3]$.

Exercice 4 *Fonctions caractéristiques et lois symétriques*

Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique φ_X . On dit que X est de loi symétrique si la loi de $-X$ est la même que celle de X , i.e. $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(-X \in A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1. Donner un exemple de loi symétrique.
2. Montrer que si X est de loi symétrique ssi φ_X est à valeurs réelles.
3. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi que X . Donner, en fonction de φ_X , la fonction caractéristique de $X - Y$.
4. Soit ε une variable indépendante de X et de loi de Rademacher $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Donner, en fonction de φ , la fonction caractéristique de εX .
5. Soient φ et ψ deux fonctions caractéristiques et $p \in [0, 1]$. Montrer que $p\varphi + (1 - p)\psi$ est encore une fonction caractéristique.

Exercice 5 ★ *Stabilité de la loi par somme indépendante*

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On suppose qu'elles possèdent un moment d'ordre 2 et on note σ^2 leur variance commune. On suppose de plus que $(X+Y)/\sqrt{2}$ a même loi que X .

1. Démontrer que X est d'espérance nulle.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de la fonction caractéristique φ_X .
3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X \left(\frac{t}{2^{n/2}} \right)^{2^n} = \varphi_X(t)$.
4. En déduire que X suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

Exercice 6 *Longue marche aléatoire*

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires toutes indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. On définit alors $(S_n)_{n \geq 0}$ par $S_0 := 0$ et $S_{n+1} := S_n + X_{n+1}$ pour $n \geq 0$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la fonction caractéristique $\varphi_{S_n/\sqrt{n}}$ converge simplement et expliciter sa limite.

Exercice 7 *Loi des événements rares*

Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires de loi binomiale $X_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la fonction caractéristique φ_{X_n} converge simplement et expliciter sa limite.

Exercice 8 *Uniformes et uniforme*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n suit la loi uniforme dans $\{1, \dots, n\}$. Montrer que la suite des fonctions de répartition $F_{X_n/n}$ des variables X_n/n converge et expliciter sa limite. Même question pour la fonction caractéristique $\varphi_{X_n/n}$.

Exercice 9 *Convergence de variables exponentielles*

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta_n)$ où la suite de paramètres vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = +\infty$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité et préciser sa limite.
2. La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle dans $\mathbb{L}^1$?
3. Étudier la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ lorsque $\theta_n = n$ puis $\theta_n = \ln n$.

Exercice 10 *Autour de la convergence presque sûre*

On jette n fois de suite un dé usuel numéroté de 1 à 6, on note X_k le résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer et Y_n le maximum des résultats : $Y_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$.

1. Montrer que la suite Y_n converge presque sûrement vers 6 lorsque n tend vers l'infini.
2. On note $N_n = \#\{k \in \{1, \dots, n\}, X_k = 6\}$. Montrer que N_n/n tend presque sûrement vers la valeur $1/6$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 11 *Maximum de variables uniformes*

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $M_n := \max(U_1, \dots, U_n)$ et $X_n := n(1 - M_n)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X_n ?
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) .

Exercice 12 ★ *Maximum d'exponentielles*

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geq 0}$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On définit alors la suite (Z_n) par

$$Z_n := \frac{1}{\ln(n)} \max_{1 \leq k \leq n} X_k.$$

1. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabilité vers $1/\lambda$.
2. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ? On pourra commencer à s'intéresser à (Z_{2^n}) .