

FEUILLE D'EXERCICES # 7

Exercice 1 *Loi de Gumbel*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Gumbel si elle admet pour densité $f_X(x) = e^{-x-e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f_X est bien une densité et calculer la fonction de répartition F_X associée.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Démontrer que la suite $(M_n - \ln(n))$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une variable aléatoire suivant une loi de Gumbel.

Exercice 2 *Somme de Bernoulli indépendantes*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que chaque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n . On note $S_n := X_1 + \dots + X_n$ et $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k$.

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n .
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini $S_n/n - \mu_n$ converge en probabilité vers zéro.
3. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ?

Exercice 3 *Lemme de Slutsky*

Soient $(X_n)_{n \geq 1}, (Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que $X_n \rightarrow X$ et $Y_n \rightarrow Y$ en loi lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables limites X et Y sont également indépendantes. Montrer alors que $(X_n, Y_n) \rightarrow (X, Y)$ en loi.
2. Sans hypothèse d'indépendance, est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \rightarrow (X, Y)$ en loi ?
3. (Lemme de Slutsky) On suppose que la variable limite Y est constante p.s. Montrer que dans ce cas, $(X_n, Y_n) \rightarrow (X, Y)$ en loi.

Exercice 4 *Sortie d'une marche aléatoire*

Soient $a < b$ et (X_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de variance finie. Montrer en utilisant la LGN et/ou le TLC que $\inf\{n > 1, X_1 + \dots + X_n \notin [a, b]\}$ est fini presque sûrement.

Exercice 5 ★ *LGN avec dépendance*

Soient $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers et U une variable aléatoire de loi uniforme dans $[0, 1]$. On considère alors les variables aléatoires $X_n := \cos(2\pi\lambda_n U)$ et $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini S_n/n converge en probabilité vers zéro.
2. Montrer que la convergence a en fait lieu presque sûrement.

Exercice 6 *Lancer de dé, LGN et TLC*

On jette n fois de suite un dé usuel numéroté de 1 à 6, on note X_k le résultat du $k^{\text{ème}}$ lancer et on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Calculer la moyenne et la variance de X_1 .
2. Quelle est la limite de S_n/n lorsque n tend vers l'infini ?
3. Quelle est la loi limite de $\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{7}{2}\sqrt{n}$ lorsque n tend vers l'infini ?
4. On admet que si Z suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbb{P}(|Z| > 1,96) = 5\%$. En déduire un intervalle I tel que $\mathbb{P}(S_{1000} \in I) \approx 95\%$.

Exercice 7 *Sommes poissonniennes*

1. Pour tout $x, \lambda > 0$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \lambda \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$$

2. Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda),$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k - \lambda n}{\sqrt{n}}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} dt.$$

Exercice 8 *Théorème de Stone-Weierstrass à la Bernstein*

- 1) Soit X une variable aléatoire réelle, positive et bornée par un nombre M .
 ǀ Démontrer que l'espérance de X existe et qu'elle vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E(X) \leq \varepsilon + M \cdot P[X \geq \varepsilon].$$

- 2) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

- (a) Soit S_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètre (n, p) .

ǀ En utilisant que f est uniformément continue sur $[0, 1]$, démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $C = C(f, \varepsilon) > 0$ pour lequel on a :

$$\left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(p) \right| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(p)\right|\right) \leq \varepsilon + \frac{C}{n}.$$

- (b) Donner une expression de $E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ sous la forme d'une fonction polynomiale en la variable p .
 - (c) Dédire des deux questions précédentes l'existence d'une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
- 3) Démontrer que toute fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions polynomiales.