CONTRÔLE CONTINU # 1

Durée 1h, aucun document autorisé.

Exercice 1 Fonctions lipschitziennes

On rappelle que l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ est complet. On désigne par E l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont lipschitziennes, i.e. l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe $M = M(f)$ avec $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ pour tout $x, y \in [0, 1]$. On définit sur E la fonction suivante :

$$N(f) := \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

1. Montrer que N est une norme sur E .
2. Montrer que (E, N) est un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel normé complet.

Exercice 2 Théorème du point fixe de Banach–Picard

Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractante, i.e. il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in E \times E$, $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$. On dit qu'un point $x_* \in E$ est un point fixe de f si $f(x_*) = x_*$.

1. Montrer que si f admet un point fixe, il est unique.
2. En considérant la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ issue de $x_0 \in E$, montrer que f admet effectivement un point fixe x_* dans E .

Indice : on pourra chercher à estimer la distance $d(x_n, x_{n+p})$.

3. Montrer que l'on peut estimer la vitesse de convergence via l'inégalité

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0).$$

4. Question bonus : on ne suppose plus f contractante mais on suppose qu'elle admet une itérée contractante, i.e. il existe $p \geq 1$, tel que $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$ est contractante. Montrer que f admet

un unique point fixe dans E .

Exercice 3 Bonus

Soit $E = \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$, pour $u = (u_n)_{n \geq 0}$ dans E . On définit l'opérateur T suivant sur E :

$$T(u) = v, \quad \text{avec } v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même et déterminer sa norme d'opérateur $\|T\|$.