

CONTRÔLE CONTINU # 2

Durée 2h, aucun document autorisé.

Exercice 1 Questions de cours ou presque

1. Énoncer le théorème de Baire.
2. Énoncer le théorème de Banach–Steinhaus.
3. Soit $p > 1$ un réel, q son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, alors on a

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \times (|f| * |g|^p)(x)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{puis} \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Indice : pour la première inégalité, on pourra appliquer l'inégalité de Hölder non pas par rapport à la mesure de Lebesgue, mais par rapport à la mesure de densité $|f|$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 2 Positivité et continuité

On considère l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On note $\mathbf{1}$ la fonction de E constante égale à un sur l'intervalle $[0, 1]$. On rappelle qu'une forme linéaire T sur E est dite positive si pour toute fonction **positive** $f \in E$, on a $T(f) \geq 0$.

1. Montrer que si T est une forme linéaire positive sur E , alors pour $f \in E$, on a $|T(f)| \leq T(|f|)$.
2. Dédurre que la question précédente le fait que si T est une forme linéaire positive, alors T est nécessairement continue et expliciter sa norme d'opérateur en fonction de $T(\mathbf{1})$.

Exercice 3 Itérées d'un opérateur de moyenne

On considère à nouveau l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On définit alors l'opérateur T sur E par la formule

$$T(f)(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \text{si } x \in]0, 1], \\ f(0), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que si $f \in E$, alors $T(f)$ est une fonction continue.
2. Montrer que T est une application linéaire continue de E dans lui-même.
3. Expliciter la norme d'opérateur de T .
4. Si $f \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, déterminer la limite de $T^n(f)$ lorsque n tend vers l'infini, où $T^n := \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}$ est la $n^{\text{ième}}$ itérée de T .
5. À l'aide d'un théorème de densité que l'on explicitera, déterminer la limite de $T^n(f)$ lorsque n tend vers l'infini, pour toute fonction $f \in E$.

Exercice 4 *Inégalité de Hardy*

On fixe $p > 1$ un réel et q sont exposant conjugué, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dans cet exercice, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on désignera simplement par $\mathbb{L}^p(I)$ l'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^p(I, \mathcal{B}(I), \lambda_I)$ où λ_I est ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ restreinte à I . On notera $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(I)}$ la “norme p ” naturellement associée. À toute fonction mesurable f sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, on associe la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x) := e^{x/p} f(e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, on considère l'opérateur T sur $\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$ défini par

$$T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0.$$

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$ si et seulement si $\tilde{f} \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$, auquel cas $\|f\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)} = \|\tilde{f}\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})}$.
2. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$, on a $\widetilde{Tf}(x) = \tilde{f} * g_q(x)$ avec $g_q(x) := e^{-x/q} \mathbf{1}_{x \geq 0}$.
3. En déduire que T est un opérateur linéaire continu de $\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$ dans lui-même avec

$$\|T(f)\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)}.$$

Indice : on pourra utiliser la dernière question de cours.