

CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU # 2

Durée 2h, aucun document autorisé.

Exercice 1 Questions de cours ou presque

1. Énoncer le théorème de Baire. [Voir cours.](#)
2. Énoncer le théorème de Banach–Steinhaus. [Voir cours.](#)
3. Soit $p > 1$ un réel, q son exposant conjugué i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, alors on a

$$|f * g(x)| \leq \|f\|_1^{\frac{1}{q}} \times (|f| * |g|^p)(x)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{puis} \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Indice : on pourra appliquer l'inégalité de Hölder non pas par rapport à la mesure de Lebesgue, mais par rapport à la mesure de densité $|f|$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

[En appliquant l'inégalité de Hölder par rapport à la mesure de densité \$|f|\$ par rapport à la mesure de Lebesgue, il vient](#)

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \times |g(x-y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1 \times |g(x-y)| \times |f(y)| dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}} 1^q |f(y)| dy \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^p(x-y) |f(y)| dy \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_1^{1/q} \times (|f| * |g|^p)(x)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

[En intégrant par rapport à \$x\$ il vient alors](#)

$$\|f * g\|_p^p = \int |f * g(x)|^p dx \leq \|f\|_1^{p/q} \int |f| * |g|^p(x) dx = \|f\|_1^{p/q} \|f| * |g|^p\|_1.$$

[D'après le cours, si \$|f|\$ et \$|g|^p\$ sont intégrables, alors \$\| |f| * |g|^p \|_1 \leq \|f\|_1 \times \| |g|^p \|_1\$, autrement dit](#)

$$\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1^{1+p/q} \|g\|_p^p$$

[et en prenant la racine \$p\$ -ième](#)

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1^{1/p+1/q} \|g\|_p = \|f\|_1 \times \|g\|_p.$$

Exercice 2 Positivité et continuité

On considère l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On note $\mathbf{1}$ la fonction de E constante égale à un sur l'intervalle $[0, 1]$. On rappelle qu'une forme linéaire T sur E est dite positive si pour toute fonction **positive** $f \in E$, on a $T(f) \geq 0$.

1. Montrer que si T est une forme linéaire positive sur E , alors pour $f \in E$, on a $|T(f)| \leq T(|f|)$.
On remarque que la fonction $|f| - f$ est positive de sorte que par linéarité $T(|f|) - T(f) \geq 0$, i.e. $T(|f|) \geq T(f)$. De la même façon, $|f| + f$ est une fonction positive de sorte que $T(|f|) \geq -T(f)$. Au final, on obtient donc bien $|T(f)| \leq T(|f|)$.
2. Dédurre que la question précédente le fait que si T est une forme linéaire positive, alors T est nécessairement continue et expliciter sa norme d'opérateur en fonction de $T(\mathbf{1})$.
Si f est dans E , la fonction $\|f\|_\infty \mathbf{1} - |f|$ est positive de sorte que par linéarité

$$T(|f|) \leq \|f\|_\infty T(\mathbf{1}),$$

et donc via la première question,

$$|T(f)| \leq \|f\|_\infty T(\mathbf{1}).$$

Cela montre que T est une forme linéaire continue avec $\|T\| \leq T(\mathbf{1})$. L'inégalité est atteinte en prenant $f \equiv \mathbf{1}$.

Exercice 3 Étude d'un opérateur de moyenne

On considère à nouveau l'espace vectoriel $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On définit alors l'opérateur T sur E par la formule

$$T(f)(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & \text{si } x \in]0, 1], \\ f(0), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que si $f \in E$, alors $T(f)$ est une fonction continue.
 $T(f)$ est clairement continue sur $]0, 1]$. Par ailleurs comme f est continue sur $[0, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \eta \ll 1$ tel que $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ si $|x| < \eta$. Alors pour $|x| < \eta$, on a

$$|T(f)(x) - T(f)(0)| = |T(f)(x) - f(0)| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - f(0)) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f(0)| dt \leq \varepsilon,$$

autrement dit, $T(f)$ est également continue au voisinage de zéro.

2. Montrer que T est une application linéaire continue de E dans lui-même.
L'application T est clairement linéaire et on a naturellement pour $0 < x < 1$

$$|T(f)(x)| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty.$$

De même $|T(f)(0)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ de sorte que $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Ainsi T est continue.

3. Expliciter la norme d'opérateur de T .
Le calcul précédent montre que $\|T\| \leq 1$, et il y a en fait égalité, la borne étant atteinte en considérant la fonction $\mathbf{1}$ constante égale à un sur $[0, 1]$.
4. Si $f \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, déterminer la limite de $T^n(f)$ lorsque n tend vers l'infini, où $T^n := \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}$ est la $n^{\text{ième}}$ itérée de T .

On considère $f(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$ un polynôme. On a alors $T(f)(0) = f(0) = a_0$ et pour $0 < x < 1$

$$T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^d a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^d a_k \frac{\left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_0^x}{x} = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} x^k.$$

Par récurrence, on montre alors facilement que $T^n(f)(0) = a_0$ et pour $0 < x < 1$

$$T^n(f)(x) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{(k+1)^n} x^k.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $T^n(f)$ converge donc vers la fonction constante $a_0 \mathbb{1}$.

5. À l'aide d'un théorème de densité que l'on explicitera, déterminer la limite de $T^n(f)$ lorsque n tend vers l'infini, pour toute fonction $f \in E$.

Comme l'intervalle $[0, 1]$ est compact, le théorème de Stone–Weierstrass assure que les fonctions polynomiales sont denses dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme. Si $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe donc une fonction polynomiale g telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. En particulier, on a $|f(0) - g(0)| < \varepsilon$. On a alors par continuité de T et comme $\|T\| \leq 1$

$$\|T^n(f - g)\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

Mais d'après la question précédente, la limite de $T^n(g)$ est la fonction constante $g(0)\mathbb{1}$ qui en norme uniforme est à distance inférieure à ε de $f(0)\mathbb{1}$. Au final, on a donc

$$\|T^n(f) - f(0)\mathbb{1}\|_\infty \leq \|T^n(f) - T^n(g)\|_\infty + \|T^n(g) - g(0)\mathbb{1}\|_\infty + \|g(0)\mathbb{1} - f(0)\mathbb{1}\|_\infty$$

et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|T^n(f) - f(0)\mathbb{1}\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Autrement dit $T^n(f)$ converge vers la fonction constante $f(0)\mathbb{1}$.

Exercice 4 *Inégalité de Hardy*

On fixe $p > 1$ un réel et q sont exposant conjugué, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dans cet exercice, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on désignera simplement par $\mathbb{L}^p(I)$ l'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^p(I, \mathcal{B}(I), \lambda_I)$ où λ_I est ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ restreinte à I . On notera $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^p(I)}$ la “norme p ” naturellement associée. À toute fonction mesurable f sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, on associe la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x) := e^{x/p} f(e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Enfin, on considère l'opérateur T sur $\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$ défini par

$$T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x > 0.$$

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$ si et seulement si $\tilde{f} \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$, auquel cas $\|f\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)} = \|\tilde{f}\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})}$.
Par le changement de variable $u = e^x$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} e^x f^p(e^x) dx = \int_0^{+\infty} |f(u)|^p du,$$

d'où le résultat.

2. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$, on a $\widetilde{Tf}(x) = \tilde{f} * g_q(x)$ avec $g_q(x) := e^{-x/q} \mathbb{1}_{x \geq 0}$.
Par définition et via le même changement de variable que plus haut

$$\begin{aligned} \widetilde{Tf}(x) &= e^{x/p} T(f)(e^x) = e^{x/p} \left(\frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(t) dt \right) = e^{x(\frac{1}{p}-1)} \left(\int_0^{e^x} f(t) dt \right) = e^{-x/q} \int_0^x f(e^u) e^u du. \\ &= e^{-x/q} \int_0^x f(e^u) e^{u/p} e^{u/q} du = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(u) e^{-(x-u)/q} \mathbb{1}_{(x-u) \geq 0} du = \tilde{f} * g_q \end{aligned}$$

3. En déduire que T est un opérateur linéaire continu de $\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)$ dans lui-même avec

$$\|T(f)\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)}.$$

Indice : on pourra utiliser la dernière question de cours.

L'opérateur T est clairement linéaire. En combinant les deux premières questions de l'exercice, on a

$$\|Tf\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)} = \|\widetilde{Tf}\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})} = \|\widetilde{f} * g_q\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})}.$$

La fonction g_q est dans $\mathbb{L}^1(]0, +\infty[)$ avec

$$\|g_q\|_{\mathbb{L}^1(]0, +\infty[)} = \int_0^{+\infty} e^{-x/q} dx = q = \frac{p}{p-1}.$$

Le résultat découle alors de la dernière inégalité de l'exercice 1, comme $f \in \mathbb{L}^p$ et $g \in \mathbb{L}^1$

$$\|\widetilde{f} * g_q\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})} \leq \|\widetilde{f}\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R})} \times \|g_q\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)} \times \left(\frac{p}{p-1}\right),$$

la dernière égalité provenant à nouveau de la question 1. On a donc bien

$$\|Tf\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \times \|f\|_{\mathbb{L}^p(]0, +\infty[)}$$

ce qui montre que T est continu.