

Introduction et rappels

1. Introduction

L'objet de l'analyse fonctionnelle est d'étudier /
faire de l'analyse géométrique / comprendre la structure
sur des espaces dont les pts sont des fonctions

ex: Polynômes $\mathbb{R}_d[x] \simeq \mathbb{R}^{d+1}$

• $C(E, F) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

• $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

• $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

• $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $C^\infty([0,1], \mathbb{R})$

• $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, Schwarz

• $Lip^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $|f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$

• $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^2$

• $L^p(E, \mu)$ $\int_E |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$

• $H^1(\mathbb{R})$, $\int |f(x)|^2 d\mu + \int |f'(x)|^2 d\mu < \infty$
Sobolev

• Besov ...

Souvent pour résoudre des EDP complexes on est amené à construire des espaces de fonctions ad-hoc c'est-à-dire des espaces de solutions comprendre leur structure aide alors grandement à décrire le comportement des solutions

Le but du cours est d'étudier la structure de certains espaces de fonctions, parmi eux les espaces de Banach, espaces de Hilbert et d'énoncer / démontrer des résultats puissants relatifs à ces structures :

- pl. fixe, Hahn-Banach, Baire
- projection sur un cv fermé, dualité ...

2. Quelques rappels

2.1. Espaces métriques

Définition : Sur E non vide, une distance est une application $E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ d_{xy}

1) $\forall u, v \in E \quad d(u, v) \geq 0$ positive

2) $\forall u \in E \quad d(u, u) = 0$

3) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ séparée

4) $d(u, v) = d(v, u)$

5) $\forall u, v, w \quad d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Proposition:

- $d(u, v) \geq |d(u, w) - d(w, v)|$ 2^e ineq. triangulaire
- $d(u, v) \leq \sum_{i=1}^n d(u_i, u_{i+1})$

Preuve : $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ par 5)

donc $d(u, v) \geq d(u, w) - d(v, w) = d(u, w) - d(w, v)$ sym

Par ailleurs, $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w) = d(u, v) + d(u, w)$

donc $d(u, v) \geq d(v, w) - d(u, w)$

ie $d(u, v) \geq |d(u, w) - d(v, w)|$.

ex: valeurs abs. des $\mathbb{R}$, module des $\mathbb{C}$.

sur $\mathbb{R}^n$, $d(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i - v_i|^2}$ distance euclidienne

sur E $d(x, y) = \delta_{x, y}$ Kronecker
"distance discrète"

Définition (diamètre) Si $A \subset E$, on définit

$$\text{diam}(A) = \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \} \in \overline{\mathbb{R}}^+$$

On dit que A est bornée si $\text{diam}(A) < \infty$.

ex: si Ω non vide, ^{quelq} on considère $B(\Omega, E)$ l'ensemble des applications bornées de $\Omega \rightarrow E$ ie $f \in B(\Omega, E)$ si $\text{diam}(f(\Omega)) < \infty$.

on définit alors une distance sur $B(\Omega, E)$ $\hookrightarrow$ positif

$$d(f, g) := \sup_{x \in \Omega} d(f(x), g(x)) \quad (\text{distance uniforme})$$

0). Vérifions tout d'abord $d_\infty(f, g) < \infty$.

En effet par hy $f \in B(\Omega, E), g \in B(\Omega, E)$

donc $\exists \alpha, B < \infty$ hy

$$\text{diam}(f(x)) \leq \alpha ; \text{diam}(g(x)) \leq B.$$

alors pour $x_0 \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) \\ &\leq \alpha + d(f(x_0), g(x_0)) + B \\ &< \infty \text{ unif en } x \end{aligned}$$

1). Ensuite $d(f(x), g(x)) > 0$ car d distance
donc $\sup_x d(f(x), g(x)) > 0$.

$$\begin{aligned} 2). \quad d(f(x), f(x)) &= 0 \Rightarrow \sup_x d(f(x), f(x)) = 0 \\ &\forall x \quad \text{donc } d_\infty(f, f) = 0. \end{aligned}$$

$$3). \quad d_\infty(f, g) = 0 \Rightarrow f = g \quad \text{OK}$$

4). symétrique OK

$$\begin{aligned} 5). \quad d(f(x), g(x)) &\leq d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) \\ &\leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \end{aligned}$$

$$\text{donc } d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g).$$

Définition : un espace métrique est le donne d'un ensemble non-vide et d'une métrique d sur E .

Proposition : tout espace métrique (E, d) est isométrique à un sous-espace de $(B(E, \mathbb{R}), d_\infty)$.

Preuve : on fixe $x_0 \in E$. Ensuite, à $x \in E$, on associe la fonction $f_x: E \rightarrow \mathbb{R}$
$$f_x(v) = d(v, x) - d(v, x_0)$$

• Montrons qu. f_x est bornée :

$$\begin{aligned} |f_x(v) - f_x(v)| &= |d(v, x) - d(v, x_0) - d(v, x) + d(v, x_0)| \\ &\leq |d(v, x) - d(v, x_0)| + |d(v, x) - d(v, x_0)| \\ &\stackrel{\text{triang.}}{\leq} 2 d(x, x_0) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{diam}(f_x(E)) \leq 2 d(x, x_0) < \infty$$

• On considère alors $\Phi: E \rightarrow B(E, \mathbb{R})$
$$x \mapsto f_x$$

C'est une isométrie. En effet

$$d_\infty(\Phi(x), \Phi(y)) = \sup_{v \in E} |\Phi_x(v) - \Phi_y(v)|$$

$$= \sup_{v \in E} |f_x(v) - f_y(v)| = \sup_{v \in E} |d(v, x) - d(v, x_0) - d(v, y) + d(v, x_0)|$$

$$= \sup_{v \in E} |d(v, x) - d(v, y)| \leq d(x, y)$$

Mais par ailleurs

$$\sup_{v \in E} |f_x(v) - f_y(v)| \geq |f_x(x) - f_y(x)| = d(x, y)$$

$$\text{donc } d_x(f_x, f_y) = d(x, y).$$

□

2.2 Espaces vectoriels normés.

Définition: sur un $\mathbb{R}$ - (ou $\mathbb{C}$) espace vectoriel, une norme N est une fonction qui vérifie:

- 1) $\forall v \in E, N(v) \geq 0$
- 2) $N(0) = 0$
- 3) $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$
- 4) $\forall v \in E, \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \quad N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$
- 5) $\forall v, u \in E \quad N(v+u) \leq N(v) + N(u)$

Etant donnée une norme $N = \|\cdot\|$, la distance associée est $d(v, u) = \|v - u\|$.

Proposition: si N est une norme sur E alors

- $\|v - u\| \geq | \|v\| - \|u\| |$
- $\| \sum_i \lambda_i v_i \| \leq \sum |\lambda_i| \|v_i\|$

Preuve: on prouve que pour la distance en remarquant que $\|u\| = d(u, 0)$.

Définition: Sur un ensemble E , on dit que deux distances d_1 et d_2 sont équivalentes si: $\exists c, C > 0$ $\forall x, y \in E$
 $c \cdot d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C \cdot d_2(x, y)$.

$$\text{ou encore } \forall x \neq y \in E \quad c \leq \frac{d_1(x, y)}{d_2(x, y)} \leq C.$$

De même, sur un ev E , on dit que deux normes N_1, N_2 sont équivalentes s'il existe $c, C > 0$ $\forall u$

$$c \cdot N_2(u) \leq N_1(u) \leq C \cdot N_2(u) \quad \forall u \in E.$$

Proposition: sur un ev E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve: voir plus loin, besoin compact et continuité!

2.3 Ouverts, fermés, compacts.

Définition: Dans (E, d) , un ensemble O est dit ouvert si $\forall u \in O, \exists \varepsilon > 0 \quad B(u, \varepsilon) \subset O$

Un ensemble F est dit fermé si F^c est ouvert.

Proposition : $E, \emptyset$ sont ouverts ; $E, \emptyset$ sont fermés

- une union quelconque d'ouverts est ouverte
- une intersection finie d'ouverts est ouverte
- une intersection de fermés est fermé.
- une union finie de fermés est fermée.

Définition : on dit que x est intérieur à A si -

$$\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset A \quad \overset{\circ}{A} = \text{pt intérieur}$$

- on dit que x est adhérent à A si $\forall \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon)$ contient un point $a \in A$ distinct de x . $\bar{A} = \text{pt adh.}$
- on dit que A est dense dans E si $\bar{A} = E$.

Proposition : $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{G \text{ ouvert de } A} G$, $\bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé contenant } A} F$

Définition : on dit que $A \subset E$ est compact si de tout recouvrement par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini (Borel-Lebesgue)

Exo : montrer qu'avec cette définition $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact

indice : $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i ouverts

$$A := \{x \in [a, b], [a, x] \text{ recouvert par un nb fini de } U_i\}$$