

8. Théorie de Hahn-Banach

Rappel autour du Lemme de Zorn

- Soit $(P, \leq)$ un ensemble muni d'une relation d'ordre.
Soit $Q \subset P$ un partie de P totalement ordonnée i.e.
 $\forall a, b \in Q$, on a soit $a \leq b$ ou $b \leq a$.
- On dit que $c \in P$ est un majorant de Q si
pour tout $a \in Q$, on a $a \leq c$.
- On dit que m est un élément maximal de Q si
si pour tout $x \in Q$, $m \leq x$ implique $x = m$.
- On dit que P est inductif si tout sous ensemble Q
totalement ordonné admet un majorant.

Lemme de Zorn : tout ensemble ordonné, non vide,
inductif admet un élément maximal

Théorie (Hahn-Banach, forme analytique).

Soit E un ev et $p: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction l.h. v.h.

$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0$.

Soit $G \subset E$ un sev et g une application linéaire
de E dans $\mathbb{R}$ l.h. $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$.

Alors il existe une forme linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ l.h.

$f|_G = g$ et $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

Preuve On définit

$$P = \left\{ \begin{array}{l} h: D(h) \rightarrow \mathbb{R}, G \subset D(h) \text{ s'écrit } E, \\ h \text{ linéaire,} \\ h|_G = g \text{ et } h(x) \leq p(x), \forall x \in D(h) \end{array} \right\}$$

que l'on munit de la relation d'ordre

$$h_1 \leq h_2 \text{ssi } [D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2|_{D(h_1)} = h_1].$$

On a

- $P \neq \emptyset$ car $g \in P$

- P est inductif: si $Q = (h_i)_{i \in I} \subset P$ est totalement ordonnée, on pose $D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ et $h(x) = h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$.

Alors h est un majorant de Q .

D'après le lemme de Zorn, P admet un elt maximal, disons f . Montrons que $D(f) = E$.

Par l'absurde, supposons que $D(f) \neq E$.

Soit alors $x_0 \in E \setminus D(f)$, alors posons

$$\{ D(h) := D(f) + \mathbb{R}x_0$$

$$\{ h(x + tx_0) := f(x) + tx \text{ avec } x \in D(f), t \in \mathbb{R}.$$

On souhaite avoir $\forall t \in \mathbb{R}, u \in D(f)$

$$h(u+tu) = f(u) + t\alpha \leq p(u+tu),$$

$$\text{en particulier } \begin{cases} f(u) + \alpha \leq p(u+u) \\ f(u) - \alpha \leq p(u-u) \end{cases}$$

or $\forall u, v \in D(f)$

$$f(u+v) \underset{lin}{=} f(u) + f(v) \leq p(u+v) \leq p(u-u) + p(v+u)$$

de sorte que $\forall u, v \in D(f)$

$$f(v) - p(v+u) \leq p(u-u) - f(u)$$

$$\text{et } \sup_y f(y) - p(y-u) \leq \inf_x p(x-u) - f(x)$$

Il suffit alors de choisir α entre ces deux bornes

$$\text{pour obtenir } h \text{ tq } \begin{cases} h|_{D(f)} = f \\ D(h) \neq D(f) \end{cases}$$

ce qui contredit la maximalité de f .

□

Corollaire : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evm et $G \subset E$ ev.

Si $g \in \mathcal{L}(G, \mathbb{R})$, il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

avec $f|_G = g$ et $\|f\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} = \|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})}$.

Preuve : On applique le théorème de Hahn-Banach !

Par définition $\forall x \in G$.

$$|g(x)| \leq \underbrace{\|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})}}_{p(x)} \|x\|.$$

D'après le théorème, il existe une application linéaire

$$f: E \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} f|_G = g \\ |f(x)| \leq p(x) = \|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})} \|x\|. \end{cases} \quad \forall x$$

En faisant $x \rightarrow -x$ on a aussi de la même façon

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = \|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})} \|x\|$$

$$\text{i.e.} \quad |f(x)| \leq \|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})} \|x\|$$

$$\text{i.e.} \quad f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \|f\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})}$$

Comme $f = g$ sur G , on a en fait

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in E}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in G}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

"

$$\|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in G}} \frac{|g(x)|}{\|x\|}$$

$$\text{donc} \quad \|f\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} = \|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})}.$$

□

Proposition : Soit E un evn, alors pour $x \in E$

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Preuve : • par définition de la norme d'opérateur on a toujours $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ et en particulier si $\|f\| \leq 1$, $|f(x)| \leq \|x\|$, de sorte que $\sup_{\substack{f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|$.

- Il y a l'inégalité en sens inverse. Pour $x \neq 0$, considérons $G = \mathbb{R}x$ et $g(tx) := t\|x\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$
 g est bien linéaire sur G et $\forall y = tx \in G$
 $\|g(y)\| = |t| \|x\| = \|y\|$.

En particulier $\|g\|_{\mathcal{L}(G, \mathbb{R})} = 1$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une application linéaire f v. $f|_G = g$ et $\forall x \in E$
 $|f(x)| \leq \|x\|$ i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $\|f\| \leq 1$.

Alors $\|x\| = g(x) = f(x)$ donc
le sup est atteint. $\square$

Définition : Soient A, B deux parties d'un ev E .

Si f est une forme linéaire sur E , on dit que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large si :

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{et} \quad f(y) \geq \alpha \\ \forall x \in A \quad \forall y \in B$$

• au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \text{et} \quad f(y) \geq \alpha + \varepsilon \\ \forall x \in A \quad \forall y \in B$$

Théorème (Hahn-Banach géométrique)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn et A, B deux ensembles convexes non-vides et disjoints. Alors, il existe une forme linéaire f et un hyperplan $H = \{f = \alpha\}$ qui sépare A et B au sens large.

Lemme : Soit G un convexe ouvert contenant 0

et $x_0 \notin G$. Alors il existe une forme linéaire f et un hyperplan $\{f = \alpha\}$ qui sépare $\{x_0\}$ et G au sens large.

Preuve du Lemme : G est ouvert donc il existe $r > 0$ assez petit de sorte que $B(0, r) \subset G$.
 Soit p_0 la fonction de jauge du cône G

$$p_0(x) := \inf \{ r > 0, \frac{x}{r} \in G \}. \quad (\text{cf exo 10 TD6})$$

Cette fonction est additive, positivement homogène
 et $G = \{ x \in E, p_0(x) < 1 \}$.

Soit $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) := t$ sur G .

Comme $g(x_0) = 1 \leq p_0(x_0)$, par homogénéité
 on a $g(x) \leq p_0(x) \quad \forall x \in G$

D'après le théorème de Hahn-Banach analytique
 il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ avec $f|_G = g$ et $\forall x \in E$
 $f(x) \leq p_0(x) \leq \frac{2}{r} \|x\|$

Puisque $\sum \frac{x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset G$.

Par linéarité, on a alors $|f(x)| \leq \frac{2}{r} \|x\|$
 i.e. $\|f\| \leq \frac{2}{r}$, i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Enfin, comme $f|_G = g$ on a d'une part

$$f(x_0) = g(x_0) = 1$$

et $f(x) \leq p_0(x) < 1 \quad \forall x \in G$

i.e. $H = \{ f = 1 \}$ sépare $\{x_0\}$ et G

□

Théorème (Hahn Banach géométrique bis)

Soient A et B deux ensembles convexes non vides de E .

On suppose A compact et B fermé. Alors il existe une forme linéaire f et un hyperplan $H = \{f = 2\}$ qui sépare A et B au sens strict.

Preuve : Soit $\varepsilon < \frac{\text{dist}(A, B)}{2}$ et $\begin{cases} A_\varepsilon = A + B_{(0, \varepsilon)} \\ B_\varepsilon = B + B_{(0, \varepsilon)} \end{cases}$

via Hahn Banach géométrique (cas large) on sépare A_ε et B_ε via une forme linéaire f_ε et un hyperplan $H_\varepsilon = \{f_\varepsilon = 2\}$.

On a alors $\forall x \in A, \forall y \in B$ et $\forall u \in E, \|u\|_\varepsilon \leq 1$
 $f_\varepsilon(x + \varepsilon u) \leq 2 \leq f_\varepsilon(y + \varepsilon u)$

$$\text{donc } f_\varepsilon(x) + \varepsilon f_\varepsilon(u) \leq 2 \leq f_\varepsilon(y) + \varepsilon f_\varepsilon(u)$$

$$f_\varepsilon(x) + \underbrace{\varepsilon \|f_\varepsilon\|}_\eta \leq 2 \leq f_\varepsilon(y) - \underbrace{\varepsilon \|f_\varepsilon\|}_\eta$$

$$\text{ic } f_\varepsilon(x) + \eta \leq 2 \leq f_\varepsilon(y) - \eta \quad \forall \eta, \gamma \in E$$

□.

Corollaire Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel
tel que $\overline{F} \neq E$. Alors, il existe une forme
linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $f \neq 0$ et
 $f|_F = 0$

Par contraposée, si F est un sev tel que
 $(f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), f|_F = 0) \Rightarrow f = 0$

alors F est dense dans E .

Preuve : Soit $x_0 \in E \setminus \overline{F}$, on applique le
théorème de Hahn-Banach géométrique b.i à
 $A = \{x_0\}$ compact et $B = \overline{F}$ convexe fermé.
Ainsi il existe une forme linéaire f et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \forall x \in \overline{F}$$

Mais alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda x \in \overline{F}$ donc

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) < \alpha$$

de sorte que $f|_{\overline{F}} = 0$!

9. Dualité dans les espaces de Banach.

Rappel : on a vu que si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, alors $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme d'opérateur

$$\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}(X, \mathbb{R})} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1 \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

De la même façon $X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$ muni de la norme d'opérateur est encore un espace de Banach.

Par ailleurs, on a établi vu que si $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Théorème : Soit X un espace de Banach et X^{**} son bidual, alors il existe une isométrie naturelle $i: X \rightarrow X^{**}$

Preuve : on définit $i: X \rightarrow X^{**}$

$$i(x)(f) = f(x).$$

Alors i est linéaire et

$$\|i(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| = \|x\| \quad \text{d'après } \textcircled{*}$$

Définition : on dit que X est réflexif si :

$i(X) = X^{**}$ i.e. i est surjective, auquel cas on peut identifier X et son bidual X^{**} .

Proposition : Si X est un espace de Banach dont le dual X^* est séparable, alors X est séparable.

Preuve : Soit (f_n) une suite de $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ qui forment une partie dense. Soit alors $u_n \in X$ t_n
 $|f_n(u_n)| \geq \|f_n\|_{X^*} - \frac{1}{n}$ (cela vient par définition du sup)

Montrons que (u_n) est dense dans X .

Si ce n'était pas le cas, $F = \text{vect}(u_n)$ ne serait pas dense dans X et d'après le dernier corollaire de la section 3, il existerait une forme linéaire non nulle f t_n $f|_F = 0$.

Si φ est une extractrice t_n $f(\varphi_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ (densité)

on aurait

$$0 = f(u_n) = f(\varphi_n u_n) + (f - f\varphi_n)(u_n)$$

$$\geq f(\varphi_n u_n) - \|f - f\varphi_n\|$$

$$\geq \|f\varphi_n\| - \frac{1}{\varphi_n} - \|f - f\varphi_n\| \rightarrow \|f\|$$

ce qui contredit $f \neq 0$. □

Corollaire : un espace de Banach est séparable et réflexif ssi son dual X^* est séparable et réflexif

Définition : Soit E un espace vectoriel normé.

On dit que $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers

$x \in E$ si : $\forall f \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

On notera $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$.

Proposition : 1) si x_n converge vers x au sens "fort"

i.e. $\|x_n - x\|_E \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ alors $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$.

2) si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

3) $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ et $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

Preuve : 1) Soit $f \in E^*$ alors

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\| \|x_n - x\|$$

donc $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in E^*$.

2) Si $x \in E$, on a vu que

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|$$

Posons $T_n(f) = f(x_n)$ de sorte que $T_n \in E^*$

$$\text{et } \|T_n\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |T_n f| = \|u_n\|.$$

D'après l'énoncé $T_n f \rightarrow T f \quad \forall f \in E^*$

$$\text{en particulier } \sup_n |T_n f| < \infty \quad \forall f \in E^*$$

D'après Banach-Steinhaus, on a alors

$$\sup_n \|T_n\| = \sup_n \|u_n\| < \infty$$

$$\text{et } \|T_n\| = \|u_n\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|.$$

$$\begin{aligned} 3) \quad |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &= O(\|f_n - f\|) \quad \text{car } x_n \xrightarrow{0} x. \end{aligned}$$

□

Définition : Soit E un evn et E^* son dual.

On dit que $f_n \in E^*$ converge faiblement*

vers $f \in E^*$ si $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in E$.

On notera $f_n \xrightarrow{*} f$.

Proposition 1) si $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ alors $f_n \xrightarrow{*} f$.

2) si $f_n \xrightarrow{*} f$ alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

3) si $f_n \xrightarrow{*} f$ et $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ alors $f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Preuve : idem

Théorème (Banach-Alaoglu)

Soit E un espace de Banach séparable. Alors la boule unité $B_{E^*} = \{f \in E^*, \|f\| \leq 1\}$ est séquentiellement compact pour la cv $\xrightarrow{*}$, i.e. pour toute suite $f_n \in B_{E^*}$, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ et $f \in B_{E^*}$ t_l

$$f_{\varphi(n)} \xrightarrow{*} f.$$

Preuve: Soit x_h une suite dense dans E , et soit f_n une suite de B_{E^*} . Pour tout $h \in \mathbb{N}$ la suite $f_n(x_h)$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Par le procédé diagonal de Cantor, on peut alors extraire une ss suite $\varphi(n)$ t_l $f_{\varphi(n)}(x_h)$ converge pour tout $h \in \mathbb{N}$ vers une limite notée $f(x_h)$.

• Pour $x \in E$, la suite $f_{\varphi(n)}(x)$ est alors de Cauchy car si $\|x - x_h\| \leq \varepsilon/3$ on a

$$\begin{aligned} |f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(m)}(x)| &\leq |(f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)})(x - x_h)| \\ &\quad + |(f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)})(x_h)| \end{aligned}$$

$$\leq \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}\| \cdot \|x - x_h\| + \|f_{\varphi(n)} - f_{\varphi(m)}\|(x_h)$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

↑ de Cauchy donc $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour $m, n \gg 1$.

Ainsi $(f_n(x))$ est convergente, de limite $f(x)$. On vérifie que f est linéaire et $\|f\| \leq 1$ et $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \mid \forall x \in B_E$ par construction, donc Γ

$$\text{ie } f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} f.$$

Remarque : en affaiblissant la topologie, on rend la boule unité "compacte" même en dimension infinie.