10. Dualité dans les $\mathbb{L}^p$.

<u>Théorème de Radon-Nikodym</u> : Soient λ et μ deux mesures ≥ 0 σ-finies sur $(E, \mathcal{E})$ et telles que $\lambda \ll \mu$ ie $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$.
Alors, il existe une fonction mesurable positive f tq
$$\forall A \in \mathcal{E} \qquad \lambda(A) = \int_A f(x) \mu(dx)$$
La fonction f est unique aux μ-négligeables près, elle est appelée dérivée de Radon-Nikodym de λ par rapport à μ.

Preuve : voir en ligne ou exo.

<u>Théorème</u> : Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré où la mesure μ est σ-finie. Pour $1 \leq p < \infty$, le dual de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ est isométriquement isomorphe à $\mathbb{L}^q(E, \mathcal{E}, \mu)$ où $q > 1$ est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Autrement dit, pour toute forme linéaire continue $L \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)^*$, il existe $f \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{E}, \mu)$ tq $\forall g \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$:
$$L(g) = \int_E f(x) g(x) \mu(dx)$$

<u>Remarque</u> : • Sauf cas triviaux, le dual de $\mathbb{L}^\infty$ contient strictement $\mathbb{L}^1$. L'espace de Lebesgue $\mathbb{L}^1([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ n'est par ex le dual d'aucun espace...

• Pour $1 < p < \infty$, les espaces $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ sont ainsi des espaces séparables et réflexifs.

<u>Preuve</u> : • Si on définit

$$\Phi : \mathbb{L}^q \longrightarrow \mathbb{L}^{p^*}$$
$$f \mapsto \left(g \in \mathbb{L}^p \mapsto \int f g \, d\mu \right)$$

alors $|\Phi(f)(g)| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_q \|g\|_p$

et en passant au sup + cas d'égalité dans Hölder

Φ est une isométrie sur son image.

• Il reste donc à montrer que Φ est surjective, autrement dit que toute forme linéaire L sur $\mathbb{L}^p$ se représente en effet sous forme intégrale.

- La mesure μ est σ-finie sur E, ie

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{avec} \quad \mu(E_n) < \infty.$$

Quitte à considérer $E_{n+1} \setminus E_n$, on peut supposer que les E_n sont disjoints.

Si on parvient à construire f_n sur E_n comme dans l'énoncé, en posant $f = \sum_n f_n \mathbb{1}_{E_n}$, on aura le résultat voulu.

Sans perdre en généralité, on peut donc supposer que μ est une mesure finie sur E.

- Soit $L \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)^*$. Il existe alors deux formes linéaires continues positives L^+ et L^- tq $\forall g \in \mathbb{L}^p$: $L(g) = L^+(g) - L^-(g)$

En effet, si $C^+ = \{g \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu),\ g \geq 0\ \mu pp\}$ on peut vérifier que

$$L^+(g) := \sup\{L(h),\ h \in C^+,\ h \leq g\}$$

convient. Autrement dit, w.l.o.g on peut supposer que L est positive sur C^+.

- Soit $L \in \mathbb{L}^p(E,\mathcal{E},\mu)^*$, positive sur C^+.

Pour $A \in \mathcal{E}$, on pose :

$$\lambda(A) := L(\mathbb{1}_A).$$

Naturellement, on a alors $\lambda(\emptyset) = 0$

et si (A_n) sont disjoints : on a par convergence

$$\mathbb{1}_{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \lim_{N\to\infty} \uparrow \mathbb{1}_{\bigsqcup_{n\leq N} A_n} = \lim_{N\to\infty} \uparrow \sum_{n\leq N} \mathbb{1}_{A_n}$$

Ainsi par linéarité et continuité de L, on déduit alors que

$$\lambda\left(\bigsqcup_n A_n\right) = L\left(\mathbb{1}_{\bigsqcup_n A_n}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} L\left(\mathbb{1}_{\bigsqcup_{n\leq N} A_n}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leq N} L(\mathbb{1}_{A_n})$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leq N} \lambda(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$$

Autrement dit, λ est une mesure positive sur $(E,\mathcal{E})$.

Par ailleurs, toujours par continuité

$$\lambda(A) = L(\mathbb{1}_A) \leq \|L\|_{\mathbb{L}^{p*}} \|\mathbb{1}_A\|_{\mathbb{L}^p}$$

$$= \|L\|_{\mathbb{L}^{p*}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}$$

en particulier $\mu(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$

i.e. $\lambda \ll \mu$.

- D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe alors une fonction f mesurable positive tq

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \lambda(A) = L(\mathbb{1}_A) = \int_A f \, d\mu$$

i.e $$L(\mathbb{1}_A) = \int_E f \mathbb{1}_A \, d\mu .$$

- Par linéarité, si g est une fonction étagée on a de même $L(g) = \int_E fg \, d\mu$. (*)

Par continuité de convergence dominée, l'équation (*) s'étend alors à $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ tout entier.

- Reste à voir que $f \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{E}, \mu)$.

Si $p = 1$, par définition de la continuité $\forall A \in \mathcal{E}$

$$L(\mathbb{1}_A) = \int_A f \, d\mu \leq \|L\|_{\mathbb{L}^{1*}} \|\mathbb{1}_A\|_{\mathbb{L}^1} = \|L\|_{\mathbb{L}^{1*}} \mu(A).$$

En prenant $A = \{x \in E, |f(x)| > \|L\|_{\mathbb{L}^{1*}}\}$ on obtient que $\mu(A) = 0$ donc $\underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{sup essentiel}} \leq \|L\|_{\mathbb{L}^{1*}}$.

Si $p > 1$, on considère $f_n = f \mathbb{1}_{|f| \leq n} \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$

(car $\mu(E) < \infty$ ici) alors comme $f \geq 0$

$$\int_E |f|^q \mathbb{1}_{|f|\leq n} \, d\mu = \int |f|^{q-1} \mathbb{1}_{|f|\leq n} |f| \, d\mu$$

$$= \int |f|^{q-1} \mathbb{1}_{|f|\leq n} f \, d\mu$$

$$= L\left(|f|^{q-1} \mathbb{1}_{|f|\leq n}\right)$$

$$\overset{\text{continuité}}{\leq} \|L\|_{\mathbb{L}^{p*}} \cdot \| |f|^{q-1} \mathbb{1}_{|f|\leq n} \|_p$$

$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

$q - 1 = \frac{q}{p}$

$$= \|L\|_{\mathbb{L}^{p*}} \left(\int |f|^q \mathbb{1}_{|f|\leq n} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

ie $\left(\int |f|^q \mathbb{1}_{|f|\leq n} \, d\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}} = \left(\int |f|^q \mathbb{1}_{|f|\leq n} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|L\|_{\mathbb{L}^{p*}}$.

en faisant $n \to \infty$, il vient finalement $\|f\|_q \leq \|L\|_{\mathbb{L}^{p*}}$.