

Proposition : une intersection de compacts est compacte.

- une union finie de compacts est compacte
- un produit de compacts est compact (Tychonov difficile)
- Les compacts de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.

dire un mot de la preuve $\Rightarrow$ voir lim ou lim

2.4 Applications continues.

Définition : On dit que $f: (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ est continue en $a \in E$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq

$$x \in B_E(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in B_F(f(a), \varepsilon)$$

On dit que f est continue si elle est continue en tout point $a \in E$

Proposition : $f: E \rightarrow F$ est continue

ssi : $f^{-1}(O)$ est ouvert pour tout ouvert O

ssi : $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé F .

Proposition : l'image d'un compact $de(E, d)$ par une application continue est compacte

- Toute fonction numérique sur un compact est bornée et atteint ses bornes
- Toute fonction continue sur un compact de (E, d) est uniformément continue (Heine)

2.5 Suites, Complétude, compacité

Définition : dans un espace métrique (E, d) , une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \forall n, m > N$
$$d(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

Définition : dans un espace métrique (E, d) toujours, on dit qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers u_∞ si : $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \quad d(u_n, u_\infty) < \varepsilon.$

Proposition : si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers u_∞ et v_∞ alors $u_\infty = v_\infty$!

Preuve : Par l'absurde, si : $\varepsilon = \frac{1}{3} d(u_\infty, v_\infty) > 0$

Pour N assez grand et $\forall n > N$ on a

$$\begin{cases} d(u_n, u_\infty) < \varepsilon \\ d(u_n, v_\infty) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow d(u_\infty, v_\infty) \leq 2\varepsilon$$

ie $d(u_\infty, v_\infty) \leq \frac{2}{3} d(u_\infty, v_\infty)$. contradiction.

Proposition : si (u_n) est une suite de Cauchy dans E , alors elle est bornée.

Rq: $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ peut être vue comme
 $u: \mathbb{N} \rightarrow E$ et bornée signifie
 que $\text{diam}(u(\mathbb{N})) < \infty$.

Preuve: Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, la
 définition nous dit $\exists N \forall n, m \geq N \ d(u_n, u_m) \leq 1$
 en particulier $\forall n \geq N \ d(u_n, u_N) \leq 1$.

Soient m, n quelconques, on a alors

$$\begin{aligned} d(u_n, u_m) &\leq d(u_n, u_N) + d(u_N, u_m) \\ &\leq 2 \left[\sup_{k \in \mathbb{N}, N-10} d(u_k, u_N) \vee 1 \right] \end{aligned}$$

Définition: Un espace métrique (E, d) est complet
 si: toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Proposition: $F \subset (E, d)$ est fermé ss: toute suite
 convergente $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ avec $u_n \rightarrow u_\infty$ où $u_\infty \in F$.

Proposition: Dans un espace métrique (E, d) , une partie
 A est compacte ss: de toute suite d'éléments de A , on
 peut extraire une suite cu dans A (Bolzano Weierstrass)
 - séquentiellement compact.
 revenir sur P. pour borné dans $\mathbb{R}^n$

Proposition : $f(E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ est continue ssi
 $\forall a \in E$ et $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ alors
 $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Retour sur l'équivalence des normes

Preuve : Soit E K evn de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$
 une base de E , i.e. $x = \sum_1^n x_i e_i$ avec $x_i \in K$.

Soit N norme sur E et $N_\alpha(u) = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$ la norme α .

On a naturellement

$$N(u) = N\left(\sum x_i e_i\right) \stackrel{\text{triang.}}{\leq} \sum |x_i| N(e_i) \\ \leq \underbrace{\left(\sum N(e_i)\right)}_{\text{cte}} N_\alpha(u)$$

• Par ailleurs, l'application $\Phi: K^m \rightarrow E$ est linéaire
 $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \sum v_i e_i$ continue

• L'ensemble $S = \{v \in K^m, \|v\|_{\alpha} = 1\}$ est compact
 donc $\Phi(S)$ également. En fait $\Phi(S) = \{x \in E, N_\alpha(x) = 1\}$
 2^e in-j

• N est Lipschitzien donc continue $|N(x+y)| \geq |N(x) - N(y)|$
 en particulier N atteint des bornes sur $\Phi(S)$. Soit $v^0 \in \Phi(S)$
 t_q $N(v^0) = \min_{v \in \Phi(S)} N(v)$.

On a $N(v^0) \neq 0$ sinon on aurait $v^0 = 0$ par def. i.e.
 $v_i^0 = 0 \forall i$ par unicité de l'écriture dans la base (e_i)
 ce qui est impossible car $(v_1^0, \dots, v_n^0) \in S$.

Alors par homogénéité, pour $x \in E$, on a

$$N(x) = N_\alpha(x) \cdot N\left(\frac{x}{N_\alpha(x)}\right) \geq N_\alpha(x) N(u^\alpha) \quad \square$$

$\underbrace{N_\alpha(x)}_{\in \mathbb{R}_+}$

Théorème (de Riesz) Dans un $(E, \|\cdot\|)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) La sphère unité est compacte
- 2) Le boucl. unité fermé est compact
- 3) Tout boucl. fermé est compact
- 4) Tout fermé borné est compact
- 5) E est de dimension finie.

Preuve : 1) $\Leftrightarrow$ 2)

Soit $(x_n) \in \bar{B}(0,1)^H$. Si elle a une infinité de k -ème nul on peut naturellement extraire une ss suite cv (la suite nulle).
Si non $\exists n_0 \forall n \geq n_0, x_n \neq 0$. Alors $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ est bien définie pour $n \geq n_0$ et c'est une suite de $S(0,1)$.

D'après 1, on peut extraire une sous suite cv $\frac{x_{\varphi(n)}}{\|x_{\varphi(n)}\|} \rightarrow a \in S$
Par ailleurs $\|x_{\varphi(n)}\| \in [0,1]^H$ de $[0,1]$ est compact donc on peut extraire une suite $\|x_{\varphi \circ \psi(n)}\| \rightarrow p \in [0,1]$

Alors la suite $x_{\varphi \circ \psi(n)} = \frac{x_{\varphi \circ \psi(n)}}{\|x_{\varphi \circ \psi(n)}\|} \cdot \|x_{\varphi \circ \psi(n)}\|$
 $\downarrow \quad \downarrow$
est cv. $a \quad p$

2) $\Rightarrow$ 3) Tout boule fermée est l'image de $B(0,1)$ par une homothétie / translation qui sont des opérations continues

3) $\Rightarrow$ 4) Soit A fermé borné dans (E, d) . Alors il existe un boule fermé $\bar{B}$ tq $A \subset \bar{B}$. A est fermé dans un compact donc compact.

4) $\Rightarrow$ 5) Si $B = \bar{B}(0,1)$ est compact alors $\exists x_1, \dots, x_k$ tq $B \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{1}{2})$

Montrons alors que $E = \text{vect}(x_1, \dots, x_k)$

Soit $x \in B$, $\exists i_0 \in \{1, \dots, k\}$, $y_0 \in B$ tq

$$x = x_{i_0} + \frac{1}{2} y_0$$

Par récurrence, on obtient alors $\forall n \geq 1$

$$x = x_{i_0} + \frac{1}{2} (x_{i_1} + \frac{1}{2} y_{i_1})$$

$$= x_{i_0} + \frac{1}{2} x_{i_1} + \frac{1}{2^2} x_{i_2} + \dots + \frac{1}{2^n} x_{i_n} + \frac{1}{2^{n+1}} y_n \quad y_n \in B$$

$$\text{Ainsi } \|x - (x_{i_0} + \frac{1}{2} x_{i_1} + \dots + \frac{1}{2^n} x_{i_n})\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

de sorte que $u_n = x_{i_0} + \frac{1}{2} x_{i_1} + \dots + \frac{1}{2^n} x_{i_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Mais il n'y a qu'un nb finie de x_i donc on peut écrire $u_n = \sum_{i=1}^k u_n^i x_i$ avec $|u_n^i - u_{n+1}^i| \leq \frac{1}{2^n}$

Ainsi la suite (v_n^j) converge vers v^j de sorte que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sum_j v^j x_j \in \text{vect}(x_1, \dots, x_k)$.

5) $\Rightarrow$ 1) Soit (x_n) une suite de $S(0,1) = \{x, N(x) = 1\}$

En choisissant un bon écriture pour $x_n = \sum_j x_n^j e_j$

Les normes étant équivalentes, il existe C tel

$$S(0,1) \subset B_\infty(0,C) = \{x, |x^j| \leq C, \forall j\}$$

De chacun des suites $(x_n^j) \in [-C,C]$, on peut extraire une suite convergente. En composant les extractions, on obtient une suite $x_\infty = \sum_j x_\infty^j e_j$

$$|N(x_n) - N(x_\infty)| \leq N(x_n - x_\infty)$$

$$\text{i.e. } |1 - N(x_\infty)| \leq N(x_n - x_\infty) \leq C \|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0$$

$$\text{i.e. } x_\infty \in S(0,1)$$

Exemple: $\ell^2(\mathbb{N}) = \{v = (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_0^\infty v_i^2 < \infty\}$

muni de $\|v\| = \sqrt{\sum_0^\infty v_i^2}$

Suite $e_n = (0, \dots, 0, \underset{n^{\text{e}}}{1}, 0, \dots)$ on

peut extraire de suite e_n

$$d(e_n, e_m) = 2 \quad \forall n \neq m$$