

3. Espaces de Lebesgue

3.1) Intégrale de Lebesgue

Sur E , tribu $\mathcal{E}$, mesure μ (σ finie)

i.e. $E = \bigcup E_n$, $\mu(E_n) < \infty$

• si fonction étagée $f = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{E}$
on pose $\int f d\mu := \sum \alpha_i \mu(A_i)$.

• si $f \geq 0$ $\int f d\mu = \sup_{\substack{g \leq f \\ \text{étagée}}} \int g d\mu \in [0, \infty]$

• si $f = f^+ - f^-$ et $\int |f| d\mu < \infty$ alors
 $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

• L'intégrale ainsi définie est telle que

• si $f \leq g$ $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

• si $f \geq 0$, $\int f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p.

• $\int (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \int g d\mu \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Point important f est intégrable selon Lebes si $\|f\|_1 < \infty$.
L'intégrale de Lebesgue coïncide avec Riemann si
 $f \in C_{\text{morceaux}}$.

3.2 Theorie des Fonctions

• Fatou

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

• cv monotone si $f_n \nearrow f$

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu \quad \downarrow \text{pruve?}$$

• cv domini

$$\left| \begin{array}{l} \text{si } f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ p.p.} \\ \exists g \text{ tq } |f_n| \leq g \end{array} \right.$$

$$\text{alors } \int f_n(x) d\mu \rightarrow \int f(x) d\mu.$$

exemples : prendre exo de Mihai avec les $\neq$
applications

exo 5.1 corrigé INTL

• Fubini:

Si f intégrable sur $(E_1 \times E_2, \mu)$ alors

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) \mu(dx_2) \right) \mu(dx_1) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) \mu(dx_1) \right) \mu(dx_2)$$

En particulier si $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)$$

3.3 Espaces de Lebesgue

Si: $p \geq 1$ et f mesurable sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$, on pose

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty]$$

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ M > 0, \mu(\{x \in E, |f(x)| > M\}) = 0 \right\}$$

avec convention $\inf \emptyset = +\infty$.

$$\mathcal{L}^p(E, \mu) = \{ f \text{ mesurable}, \|f\|_p < \infty \} / \text{égalité } \mu.p.p$$

ex: $\mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} \equiv 0$ dans $\mathcal{L}^p([0,1], \lambda)$.

Inégalité de Hölder

Si: $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ où p, q

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve: si $p = +\infty$ (ou q par sym.) on a

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_\infty |g(x)| \quad \mu.p.p \text{ donc}$$

$$|f(x)g(x)| \leq \|f\|_\infty |g(x)| \quad \mu.p.p$$

d'où en intégrant

$$\int |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Si $p, q \neq +\infty$ traitons d'abord le cas où
 $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

Si $|f(x)|, |g(x)| \neq 0$ on écrit

$$|f(x)|^p = e^u, \quad |g(x)|^q = e^v$$

$$\text{ic } u = p \log |f(x)|, \quad v = q \log |g(x)|$$

alors par convexité de $\exp$

$$\exp\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right) \leq \frac{1}{p}e^u + \frac{1}{q}e^v$$

$$\text{ic } |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

Puisque cette relation est vraie pour $f(x), g(x) \geq 0$ on a

en intégrant on trouve

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{ic,}$$

$$= \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

• Si $\|f\|_p \neq 1$ ou $\|g\|_q \neq 1$, on considère

$$\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad \tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$$

ce qui donne $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 \leq 1$

$$\text{ie } \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

si $\|f\|_p = 0$ (ou $\|g\|_q = 0$) on a $f = 0$ pp
donc $Sfg = 0$ pp car

si $\|f\|_p = +\infty$, on majore par l'...

Inégalité de Minkowski

Si $f, g \in L^p$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Rq: c'est l'inégalité triangulaire!

• Pour $p=1$, on intègre l'inégalité triangulaire.

• Pour $p=+\infty$, si $\|f\|_\infty \leq M$ et $\|g\|_\infty \leq N$
alors $\|f+g\|_\infty \leq M+N$

En faisant $M \downarrow \|f\|_p$ et $N \downarrow \|g\|_p$ on
conclut $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

. Si $1 < p < \infty$, on écrit

$$\begin{aligned}(f+g)^p &= (f+g)(f+g)^{p-1} \\ &= f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}\end{aligned}$$

$$|f+g|^p \leq |f| |f+g|^{p-1} + |g| |f+g|^{p-1}$$

Via Hölder, on a alors

$$\int |f| |f+g|^{p-1} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

et de même

$$\int |g| |f+g|^{p-1} \leq \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

car $(p-1)q = p$ et $\frac{1}{q} = \frac{(p-1)}{p}$ il vient donc

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}$$

- Si $\|f+g\|_p \neq 0$ on en divise par $\|f+g\|_p$
- $\|f+g\|_p = 0$ rien à montrer
- $\|f+g\|_p = +\infty \Rightarrow \|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_p = +\infty$
car $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p$
 $\leq 2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|g|^p$ $\square$

Corollaire : $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme
sur L^p