

- Si $\|f+g\|_p \neq 0$ on en divise par $\|f+g\|_p$
- $\|f+g\|_p = 0$ rien à montrer
- $\|f+g\|_p = +\infty \Rightarrow \|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_p = +\infty$
 car $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p$
 $\leq 2^{p-1}|f|^p + 2^{p-1}|g|^p$ $\square$

Corollaire : $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme
 sur L^p

Théorème (Riesz-Fischer) Pour $p \geq 1$, les espaces L^p sont complets.

Preuve : On considère une suite de Cauchy (f_n) . Il s'agit de voir qu'elle converge.

Cas $p = +\infty$.

$$A_{n,m} = \{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, $\mu(A_{n,m}) = 0$
donc $\mu\left(\bigcup_{n,m} A_{n,m}\right) = 0$.

Pour $x \in E \setminus \bigcup A_{n,m}$ on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

qui est de Cauchy, donc $(f_n(x))$ est
de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge
vers $f(x)$.

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n, m$ et $x \in E \setminus \bigcup A_{n,m}$
uniformement en x
 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

En faisant $m \rightarrow +\infty$ il vient
 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

de sorte que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ ($\mu(\bigcup A_{n,m}) = 0$)

[En particulier $\|f\|_\infty < \varepsilon + \|f_m\|_\infty < \infty$]

ie f_n converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

cas $p < \infty$

On suppose p. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \forall m, n > N$
 $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$

Alors $\forall i \exists m_i$ t.
 $\|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p < \frac{1}{2^i}$

On pose

$$g_h = \sum_1^h |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

$$g = \lim_{h \rightarrow \infty} g_h = \sum_1^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

Par l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned} \|g_h\|_p &\leq \sum_1^h \|f_{m_{i+1}} - f_{m_i}\|_p \\ &\leq \sum_1^h \frac{1}{2^i} \leq 1 \end{aligned}$$

Par convergence monotone

$$\int g^p dp = \lim_{h \rightarrow \infty} \|g_h\|_p^p \leq 1$$

donc $g \in L^p$ de sorte que
 $N = \{x, |g(x)| = +\infty\}$ est de mesure
 nulle.

Mais alors pour $x \in E \setminus N$, la série
 $\sum_i |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$ est absolument
 convergente, est convergente ! i.e
 $\sum_i (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$.

$$On \text{ pose } f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_i^{+\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})(x) \\
\left| \begin{array}{l} \text{si } x \in E \setminus N \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Par télescopage $f(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} f_{n_h}(x)$
 i.e f_{n_h} converge p.p.

D'après la condition de Cauchy on a
 $\int |f_m - f_n|^p dp < \varepsilon^p$ pour $m, n > N$

En prenant $m = m_\varepsilon \geq N$ on obtient
par Fatou

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n - f_{m_\varepsilon}|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f_{m_\varepsilon}|^p d\mu \\ \leq \varepsilon^p$$

i.e

$$\int |f_n - f|^p \leq \varepsilon^p$$

i.e $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon.$

ceci implique que $f \in L^p$ car

$$\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p$$

et $f_n \rightarrow f$ dans $(L^p, \|\cdot\|_p)$ $\square$

Remarque : c'est pour ça qu'on a introduit l'intégrale de
les espaces de Lebesgue !