

3.4 Convolution et régularisation

Dans toute cette section, on se place sur $(E, \mathcal{E}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \text{Lebesgue})$.

Définition : Soient f et g deux fonctions mesurables. Lorsque l'intégrale suivante est bien définie, on définit le convolué des fonctions f et g , notée $f * g$ par
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Lorsque bien défini, $f * g(x) = g * f(x)$ et $(f, g) \mapsto f * g$ est bilinéaire.

Proposition : Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g$ est bien défini presque partout et
$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Proof:
$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y)| dy dx$$

$$\stackrel{Fub}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right) |g(y)| dy$$

$$= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Ainsi

$$\|f * g\|_1 = \int |f * g|(x) dx$$

$$= \int \left| \int f(x-y) g(y) dy \right| dx$$

$$\leq \iint |f(x-y) g(y)| dy dx$$

$$\leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

□

Avant d'aller + loin, établissons le résultat de densité suivant:

Proposition: Les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^n)$

Preuve: par co-struction, les fonctions
 étagées sont denses dans L^p , i.e
 si $f \in L^p$, $\forall \varepsilon > 0 \exists g$ étagée t.
 $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Il s'agit alors d'approcher
 g par une fonction à support compact
 C'est $g = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$ il suffit en fait
 d'approcher $\mathbb{1}_A$ par une fonction C_c
 où $L^p(A) < \infty$.

Par régularité de la mesure de Lebesgue
 $\forall \eta > 0 \exists K \subset A \subset G$ K compact
 tel que $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$. μ ouvert

Alors d'après le lemme d'Urysohn, $\exists \varphi \in C_c$
 $\mathbb{1}_K \leq \varphi \leq \mathbb{1}_G$
 de sorte que $\|\varphi - \mathbb{1}_A\|_p \leq \mu(A \setminus K)^{1/p} < \varepsilon$

□

Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\tau_h f : x \mapsto f(x+h)$$

Proposition : Pour $p < \infty$

• $\tau_h : f \mapsto \tau_h f$ est isométrie de L^p

• Lorsque $h \rightarrow 0$, $\tau_h f$ converge vers f dans L^p

Preuve :

$$\begin{aligned} 1) \|\tau_h f\|_p &= \left(\int |f(x+h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\underset{y=x+h}{=} \left(\int |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \end{aligned}$$

2) • On commence par traiter le cas des fonctions continues à support compact qui, on l'a vu, sont dense dans L^p .

Si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi = 0$ sur $B(0, R)^c$
 alors pour $\|h\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|\tau_h \varphi - \varphi\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_{\bar{B}(0, R+1)} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Sur $\bar{B}(0, R+1)$, φ est unif continue donc
 $\forall \varepsilon > 0$, $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\| < \varepsilon$ pour h assez petit.

$$\text{Alors } \|\tau_h \varphi - \varphi\|_p^p \leq \varepsilon \text{vol}(\bar{B}(0, R+1))$$

$$\text{ie } \|\tau_h \varphi - \varphi\|_p \leq \varepsilon^{1/p} \text{vol}(\bar{B}(0, R+1))^{1/p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

• Si $f \in L^p$, $\exists \varphi \in C_c$ t. $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$
 alors

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p &\leq \|\tau_h f - \tau_h \varphi\|_p + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_p \\ &\quad + \|f - \varphi\|_p \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{is}}{\leq} \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Theorem Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$

1) $f \times g$ est continue (uniformement)

2) Si $p, q \neq \infty$ $\lim_{\|x\|_\infty} |f \times g|(x) = 0$

Preuve :

$$\begin{aligned} 1) \quad |f \times g(x+h) - f \times g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} f(y) |g(x-y+h) - g(x-y)| dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \left(\int |g(x-y+h) - g(x-y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_p \left(\int |g(x+h) - g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_p \|T_h g - g\|_q \quad (q < \infty \text{ d'après}) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{d'après la proposition ci-dessus,} \end{aligned}$$

2) exo.

Proposition : si $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in C^\infty$
alors

$$f * g \in C^\infty$$

$$\text{avec } \partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$$

Preuve : dérivation sous le signe somme

Définition : une suite de fcti. $(p_h) \geq 0$
est appelée approximation de l'unité si

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^n} p_h(u) du = 1,$$

$$\bullet \int_{|x| > h} p_h(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall h > 0$$

Ex: si $p \in \mathcal{L}^1$ avec $\int_{\mathbb{R}^n} p du = 1$

$$\text{alors } p_h(x) = h^n p(hx)$$

est une approximation de l'unité.

Ex : $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$p(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Theoreme : Soit (p_h) approx unite-

1) • si f est uniformement continue (c particulier $f \in C^0$) alors $f \times p_h$ cv uniform vers f .

2) • s. $f \in L^p$ ($1 \leq p < \infty$) alors $f \times p_h$ converge vers f dans L^p .

Preuve : 1) exo

$$\begin{aligned} 2) \quad |f \times p_h(x) - f(x)| &= \left| \int (f(x-y) - f(x)) p_h(y) dy \right| \\ &\leq \int |f(x-y) - f(x)| p_h^{\frac{1}{p}}(y) p_h^{\frac{1}{q}}(y) dy \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Höld.}}{\leq} \left(\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_h(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\underbrace{\int \rho_h dy}_{=1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ainsi on intègre en x

$$\|f * \rho_h - f\|_p^p \leq \iint |f(x-y) - f(x)|^p \rho_h(y) dy dx$$

$$\stackrel{\text{Fub}}{=} \int \|T_{-y}f - f\|_p^p \rho_h(y) dy$$

$$= \int_{|y| < \eta} \|T_{-y}f - f\|_p^p \rho_h(y) dy + \int_{|y| > \eta} \|T_{-y}f - f\|_p^p \rho_h(y) dy$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta \text{ t.q. } \|T_{-y}f - f\|_p^p \leq \varepsilon \text{ si } |y| < \eta$$

$$\|T_{-y}f - f\|_p \stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \|T_{-y}f\|_p + \|f\|_p$$

$$\stackrel{\text{Iso}}{=} 2\|f\|_p$$

Ainsi:

$$\|f * \rho_h - f\|_p^p \leq \varepsilon^p \int_{|y| < \eta} \rho_h(y) dy + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y| > \eta} \rho_h(y) dy$$

$$\leq \varepsilon^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y| > \eta} \rho_h(y) dy$$

$$\text{ie } \lim_{h \rightarrow 0} \|f * \rho_h - f\|_p \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon.$$

$$\text{ie } f * \rho_h \xrightarrow{L^p} f.$$

Corollaire : C_c^∞ dense dans L^p

Preuve : troncature et régularisation

troncature soit $f \in L^p$ et $f_n = f \chi_{B(0,n)}$

$$\text{alors } |f_n(x) - f(x)| \leq 2|f(x)|$$

et $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout x .

Par cv dominée $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

$$\text{ie } \|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

régularisation soit ρ_h approx de l'unité. C^∞

$(f_n * \rho_h)_h$ est C^∞ et cv vers f_n dans L^p

Pour $\varepsilon > 0$, on écrit

$$f - f_n * \rho_h = f - f_n + f_n - f_n * \rho_h$$

$$\|f - f_n * \rho_h\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n - f_n * \rho_h\|$$

$< \varepsilon$
pour n assez
grand

$< \varepsilon$
pour h assez
grand