

Espaces de Banach

1) Définitions, propriétés immédiates

Définition : on appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

Ex: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, avec toutes les normes car équivalentes

$(B(X, E), \|\cdot\|_q)$ si E complet

$C_b(X, E)$ si E compl.

$(L^p, \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1, +\infty]$

Rappel: si $(E, \|\cdot\|)$ evn, on dit qu'une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est normalement convergente si $\sum_n \|x_n\| < +\infty$

Proposition Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn alors on a l'équivalence

1). $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach

2). Toute série normalement convergente $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente dans E .

Preuve : 1) $\Rightarrow$ 2) Soit $(x_n) \in E^n$ normable car ie $\sum \|x_n\| < \infty$. Alors par inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car (x_n) normable convergente. Alors on dit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, p > N$$

$$\left\| \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^n x_k \right\| < \varepsilon$$

ie $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ est de Cauchy donc cv dans E complet.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E .

Pour voir que (x_n) cv il suffit de montrer que (x_n) admet une sous-suite cv (cf exo 2, TD1).

On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \forall m, n > N$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

en particulier pour une extraction φ bien choisie

$$\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{2^n}.$$

Alors $x_{\varphi(n)} = x_{\varphi(0)} + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{\varphi(i+1)} - x_{\varphi(i)})$
est normable cv, donc cv. $\square$

Proposition :

- 1) Tout evn de dim fini est un espace de Banach
- 2) Un produit fini d'espaces de Banach pour les mêmes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$
- 3) Si F est fermé de $(E, \|\cdot\|)$ Banach alors E/F est un Banach pour $\|\bar{x}\|_{E/F} := \inf_{y \in F} \|x-y\|_E, \forall \bar{x} \in E/F$

Preuve : 1) Si $(e_1, \dots, e_n)$ base de $(E, \|\cdot\|)$ alors

$$\Phi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} E$$
$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

est un isomorphisme linéaire et isométrique entre $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ et $(E, \|\cdot\|_\infty)$ $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

- 2) Si $(E_i, \|\cdot\|_i)$ evn comp^t alors $\prod_i E_i$ est comp^t puisque muni d'un de ces

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\|x_1\|_1^p + \|x_2\|_2^p + \dots + \|x_n\|_n^p \right)^{1/p}$$
$$\text{ou } \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n)$$

- 3) La projection naturelle $\begin{matrix} x \mapsto p(x) = \bar{x} \\ E \mapsto E/F \end{matrix}$ est continue car 1-Lipschitz

$$\|\bar{x}\|_{E/F} := \inf_{y \in F} \|x-y\|_E \leq \|x-0\|_E = \|x\|$$

Soit maintenant une série de terme général $(\bar{x}_n) \in E/F^N$ qui converge normalement dans E/F . On va montrer que la série $(\sum \bar{x}_n)$ converge dans E/F .

Par définition de $\|\cdot\|_{E/F}$ via $P \inf$, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in \bar{x}_n$ tq

$$\|\bar{x}_n\|_{E/F} \leq \|x_n\|_E \leq \|\bar{x}_n\|_{E/F} + \frac{1}{2^n}$$

Comme $\sum \|\bar{x}_n\|_{E/F}$ converge par Propriété, on déduit que $\sum \|x_n\|_E$ est elle-même convergente et par suite $(\sum x_n)$ est convergente dans E compl. Comme la projection p est continue, on conclut que $\sum \bar{x}_n = p(\sum x_n)$ converge dans E/F d'où le résultat.

Exemples : • $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ compl.

$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ est complet pour $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2}$

• $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

$\mathbb{R} \subset C([0,1], \mathbb{R})$ les fonctions constantes

$(C([0,1], \mathbb{R}) / \mathbb{R})$: on identifie deux fonctions qui diffèrent d'une conste.

• $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ suites bornées, ce sont les suites convergentes vers 0.

ℓ^∞ / c_0 on identifie deux suites dont la différence tend vers 0.

2. Applications linéaires continues

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition: Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

Proposition: Si A est linéaire de E dans F alors on a les équivalences:

- 1) A est continue en $v_0 \in E$
- 2) A est continue sur E tout entier
- 3) A est lipschitzienne sur E (en particulier unif. continue)
- 4) $\forall B \subset E$ bornée alors $A(B)$ est bornée dans F .
- 5) $\exists M > 0$ t.q. $\forall v \in E \quad \|Av\|_F \leq M \cdot \|v\|_E$.

Preuve: 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1) sont évidentes

1) $\Rightarrow$ 5) on se ramène à $v_0 = 0$, ainsi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta$ t.q.
 $\|v\|_E \leq \eta \Rightarrow \|Av\|_F \leq \varepsilon$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, $\exists \eta$ t.q. $\|v\|_E \leq \eta \Rightarrow \|Av\|_F \leq 1$

Pour $v \in E \setminus \{0\}$ on écrit alors par homogénéité:

$$\|Av\|_F = \left\| A \frac{v}{\|v\|_E} \cdot \eta \right\| = \frac{\|v\|_E}{\eta} \left\| A \frac{v}{\|v\|_E} \right\| \leq \frac{\|v\|_E}{\eta}$$

d'où le résultat avec $M = \frac{1}{\eta}$.

5) $\Rightarrow$ 4) Soit $B \subset E$ partie bornée i.e. $\exists R$ t.q. $\|u\| \leq R$
 $\forall u \in B$.
 soit $v \in A(B)$ i.e. $v = Au$ alors

$$\|v\|_F = \|Au\|_F \underset{5)}{\leq} M \|u\| \leq M.R$$

i.e. $A(B) \subset B(0, M.R)$.

4) $\Rightarrow$ 5) $A(B(0,1))$ est bornée i.e. $\exists M$ t.q. si $u \in E$
 vérifie $\|u\|_E \leq 1$ alors $\|Au\|_F \leq M$.

Alors pour $u \in E \setminus \{0\}$ quelconque, on a

$$\begin{aligned} \|Au\|_F &= \left\| A \frac{u}{\|u\|_E} \cdot \|u\|_E \right\|_F = \|u\|_E \|A \frac{u}{\|u\|_E}\|_F \\ &\leq M \cdot \|u\|_E. \end{aligned}$$

• 5) $\Rightarrow$ 3) On applique 5) avec $u-v \in E$ alors
 $\|A(u-v)\|_F = \|Au - Av\|_F \leq M \cdot \|u-v\|_E$
 i.e. A est M -Lipschitzienne. $\square$

Remarque : pour montrer qu'une application linéaire
 est continue, il sera bien plus efficace de chercher
 à établir que $\|Au\| \leq M \cdot \|u\|$ plutôt que $\forall \epsilon > 0$
 $\exists \delta > 0$ t.q. ...

Exemple • $E = C([-1,1], \mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |f(x)|$
 $F = \mathbb{R}$, l.l. valeurs absolue.

$A: \begin{cases} E \rightarrow F \\ f \mapsto f(0) \end{cases}$ application linéaire.

$$|Af| = |f(0)| \leq \sup_{[-1,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$$

donc A est linéaire continue de $E \rightarrow F$.

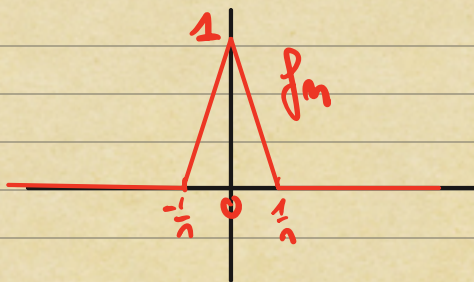
• $E = C([-1,1], \mathbb{R})$, $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$
 $F = \mathbb{R}$, l.l. valeurs absolue

$Af = f(0)$ à nouveau et $|Af| = |f(0)|$

Si A était continue, $\exists M > 0$ t. $|f(0)| < M \|f\|_1$
 pour tout $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$

Ce n'est pas le cas, prendre par ex

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } [-1, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1] \\ 1 - |nx| & \text{sur } [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{cases}$$



Alors $|f_n(0)| = 1$ et

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n}$$

et $1 \leq \frac{1}{\frac{1}{n}}$ est faux pour $n \gg 1$!

Ainsi A n'est pas continue de $E \rightarrow F$!

Théorème: Pour $A \in \mathcal{L}(E, F)$ on pose

$$\nu(A) := \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E} \quad \left(\text{fini par le pr} \right. \\ \left. \text{5) des définites} \right. \\ \left. \text{équivalentes} \right)$$

Alors

$$\nu(A) = \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\| \leq 1}} \|Au\|_F = \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\| < 1}} \|Au\|_F$$

$$= \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\|=1}} \|Au\|_F$$

$$= \inf \{ M \text{ réel } \geq 0 \mid \forall u \in E \ \|Au\|_F \leq M \|u\|_E \}$$

ν est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ (norme naturelle ou norme d'opérateur)

Preuve: au prochain cours.