

Théorème: Pour $A \in \mathcal{L}(E, F)$ on pose

$$\nu(A) := \sup_{\substack{v \in E \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_F}{\|v\|_E} \quad \left(\text{fini par le pr 5) des def. et} \right. \\ \left. \text{eq. val.} \right)$$

Alors

$$\nu(A) = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\| \leq 1}} \|Av\|_F = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\| < 1}} \|Av\|_F$$

$$= \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\|=1}} \|Av\|_F$$

$$= \inf \{ M \text{ réel } \geq 0 \mid \forall v \in E \|Av\|_F \leq M \|v\|_E \}$$

ν est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ (norme naturelle ou norme d'opérateur)

Preuve: Posons $\|A\| = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\| \leq 1}} \|Av\|_F$

et montrons que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$

Par 5), on sait qu'il existe M t. $\|Av\|_F \leq M \|v\|_E$
donc $\|A\| \leq M < \infty$ est bien défini.

• $\|A\| \geq 0$ car $\forall v \quad \|Av\|_F \geq 0$

• si $\|A\| = 0$ alors $\forall v \in \mathcal{B}(0,1) \quad Av = 0$

mais alors si $v \in E \neq 0 \quad \|Av\| = \|A \frac{v}{\|v\|}\| \cdot \|v\| = 0$

donc $A = 0$

• $\|A\|$ est homogène car $\|\cdot\|_F$ l'est

- Si $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ on a cō $\|\cdot\|_F$ est un norme pour $v \in \mathcal{B}(0,1)$

$$\begin{aligned} \|(A+B)u\|_F &= \|Au + Bu\|_F \\ &\leq \|Au\|_F + \|Bu\|_F \\ &\leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

donc $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

le $\|\cdot\|$ est bien une norme.

Vérifions maintenant l'égalité des différentes quantités

- Par homogénéité

$$\begin{aligned} v(A) &= \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \|A \frac{u}{\|u\|_E}\|_F \\ &= \sup_{\substack{u \in E \\ \|u\|=1}} \|Au\|_F \end{aligned}$$

- Ensuite $\sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\|$

et si $\|v\| \leq 1$, on approche v par $v_n = v(1 + \frac{1}{n})$ qui vérifie $\|v_n\| \leq 1$ et satisfait l'égalité par continuité!

- De même on a $\sup_{\|u\|=1} \|Au\|_F \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\|_F$

si $A=0$ on a égalité, aussi supposons $A \neq 0$

Si l'inégalité était stricte, $\exists$ existant $\|v\|_E < 1$

$$\forall v \quad \|Av\|_F > \|Av\|_F \quad \forall v \quad \|v\|_E = 1$$

$$\text{Ainsi } \|A\|_F = \frac{\|Av\|_F}{\|v\|_E} > \|Av\|_F > \|A\|_F \quad \text{absurde.}$$

$$\cdot \text{ Enfin } \{M > 0, \forall v \in E \quad \|Av\|_F \leq M \cdot \|v\|_E\}$$

$$\{M > 0, \forall v \in E \setminus \{0\} \quad \frac{\|Av\|_F}{\|v\|_E} \leq M\}$$

$$\text{Le borné inf de cet ensemble est } \sup_{\substack{v \in E \\ v \neq 0}} \frac{\|Av\|_F}{\|v\|_E} = \nu(A)$$

ce qui conclut. $\square$

Dans la suite, on notera $\|A\| = \nu(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$

Remarque : par définition, si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ on a l'inégalité $\|Av\|_F \leq \|A\| \cdot \|v\|_E \quad \forall v \in E$.

Proposition : si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$ avec

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|.$$

Preuve : par définition pour $v \in E$

$$\|B \circ A(v)\| \leq \|B\| \|Av\|_F \leq \|B\| \cdot \|A\| \|v\|_E$$

Corollaire : si $A \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ alors $A^n = A \circ \dots \circ A$
est continue avec $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ pour $n \geq 0$.

Preuve : pour $n=0$ $A^0 = Id$ et

$$\|Id_E\| = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\|=1}} \|Id_E(v)\| = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\|=1}} \|v\| = 1$$

Par récurrence on obtient $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ via la
proposition précédente.

Définition : si E, F deux evm alors on désigne par
 $\mathcal{I}so_m(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires
continue et inversible dont l'inverse est linéaire continu
 $\mathcal{I}so_m(E, F) = \{v \in \mathcal{L}(E, F), v \text{ bijectif}, v^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)\}$

Proposition : $A \in \mathcal{I}so_m(E, F)$ ssi A est inversible et
il existe des constantes m et $M > 0$ tels que $\forall v \in E$
 $m \|v\|_E \leq \|Av\|_F \leq M \|v\|_E$

Preuve : on prend $M = \|A\|$ et $m = \|A^{-1}\|^{-1}$
via la caractérisation ss de la continuité.

Proposition : Si E est d.n. finie et F est quelconque alors toute application linéaire de E vers F est continue.

Preuve : toutes les normes sur E sont équivalentes
donc $\| \cdot \|_E \sim \| \cdot \|_B$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in B_n$
et $\|x\|_B = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$

Si $A: E \rightarrow F$ est linéaire

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{i=1}^n x_i (Ae_i) \text{ et} \\ \|Ax\|_F &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Ae_i\|_F \leq \|x\|_B \cdot \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_F \\ &\leq \underbrace{(C \cdot \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_F)}_{\text{norme équivalente}} \|x\|_E \end{aligned}$$

$$\text{en particulier } \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq C \cdot \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_F < \infty.$$

Théorème : Soient E, F des ev. Si F est complet alors $(\mathcal{L}(E, F), \| \cdot \|_{\mathcal{L}(E, F)})$ est complet.

Preuve : Soit $B = \overline{B}(a)$ dans E . On définit
 $\Phi : \begin{cases} (\mathcal{L}(E, F), \| \cdot \|) \\ f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (C_b(B, F), \| \cdot \|_B) \\ f|_B \end{cases}$

- Par définition de la p -norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{I}$ est une isométrie :

$$\|\mathcal{I}f\|_\infty = \sup_{\|u\|_E \leq 1} \|f(u)\|_F = \|f\|.$$

et $\mathcal{I}$ est une bijection sur son image.

Si on connaît f sur B alors, pour $x \in E$

$$f(x) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{ie on connaît } f \text{ partout.}$$

- Par ailleurs, l'image de $\mathcal{I}$ est fermée dans $C_b(B, F)$

si $f_n = \mathcal{I}(g_n)$ converge dans $C_b(B, F)$

vers f , alors f est l'image de f est continue

car $C_b(B, F)$ est fermé (limite de fct. unif. continues)

Par suite, l'image de $\mathcal{I}$ est complète (fermée dans un compl., cf exo TD 2) et par l'isométrie

$\mathcal{L}(E, F)$ est compl.

□

Corollaire : Soit E un E.V.N sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

l'espace dual $\mathcal{L}(E, K)$ des formes linéaires continues

est un espace de Banach pour la norme $\|u\| = \|u\|_{\mathcal{L}(E, K)}$

Preuve : on applique la proposition précédente avec $F = K$ complet.

Proposition : Soit A une forme bilinéaire sur E Ker.
Alors A est continue (i.e. $A \in \mathcal{L}(E, K)$) si et
seulement si $\text{Ker}(A)$ est fermé.

Preuve : . Si A est continue alors $\text{Ker}(A) = A^{-1}(\{0\})$ est
fermé.

• Réciproquement supposons $\text{Ker}(A)$ fermé. ($A \neq 0$)

Soit $x_0 \in E$ t_h $Ax_0 = 1$ (prendre $\frac{x}{|Ax|}$ si $Ax \neq 0$)

Alors $x_0 + \text{Ker}(A)$ est fermé et $0 \notin x_0 + \text{Ker}(A)$
(sinon on aurait $x_0 \in \text{Ker}(A)$ mais $Ax_0 = 1$)

Ainsi $0 \in (x_0 + \text{Ker}(A))^c$ ouvert donc $\exists 0 < p < 1$
t_h $B(0, p) \subset (x_0 + \text{Ker}(A))^c$

Pour $x \in B(0, p)$, on a $Ax \neq 1$ car sin-
on aurait $Ax - Ax_0 = A(x - x_0) = 1 - 1 = 0$
i.e. $x - x_0 \in \text{Ker } A$ i.e. $x \in x_0 + \text{Ker}(A)$
ce qui est absurde.

• Montrons qu'en fait $|Ax| < 1$ si $x \in B(0, p)$.

Par l'absurde supposons qu'il existe $x_1 \in B(0, p)$
avec $|Ax_1| \geq 1$.

On arrive à

$$\| \frac{x_1}{\|Ax_1\|} \| \leq \|u_1\| < \rho \text{ et } \frac{|Ax_1|}{\|Ax_1\|} = 1$$

ce qui contredit $Au \neq 1$ pour $u \in B(0, \rho)$.

• En conclusion, $|Ax| < 1 \quad \forall x \in B(0, \rho)$
d'où

$$1 \geq \sup_{\|x\| < \rho} |Ax| = \rho \sup_{\|u\| < 1} |Au|$$

ie $\|A\| \leq \frac{1}{\rho}$ et A est continue. $\square$

+

Inverse de Neumann Boyer p25