

3. Théorèmes de point fixe

Théorème (Banach-Picard)

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ une application contractante i.e. $d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ $\forall x, y \in X$ avec $k \in]0, 1[$. Alors f admet un unique point fixe $x^* \in X$ et si $x_0 \in X$, la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ vérifie
$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Preuve: voir CC

Corollaire: si f n'est pas contractante mais $f^p = f \circ \dots \circ f$ $\frac{p}{1-k}$ fois l'est alors f admet un unique pt fixe x^* et la suite $\begin{matrix} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ fixe} \end{matrix}$ converge encore vers x^* .

Proposition: Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach et si $f: E \rightarrow E$ est Lipschitzien avec $\text{Lip}(f) < 1$ alors $\text{Id} - f$ est bijective et son inverse est Lipschitzien avec $\text{Lip}((\text{Id} - f)^{-1}) \leq \frac{1}{1 - \text{Lip}(f)}$.

Preuve: il s'agit de voir que $\forall y \in E$, il existe $x \in E$
 $x - f(x) = y$ ou encore si on pose
 $\varphi_y(x) = y + f(x)$ que la fonction φ_y
 admet un pt fixe. Montrons que φ_y est
 contractante.

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| = \|f(x_1) - f(x_2)\|$$

$$\leq \text{Lip}(f) \|x_1 - x_2\|$$

Ainsi φ_y admet un pt fixe et $\text{Id} - f$ est inversible.

Enfin si $x_1 = f(x_1) + y_1$, $x_2 = f(x_2) + y_2$
 alors $y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))$ donc

$$\|x_1 - x_2\| = \|f(x_1) + y_1 - f(x_2) - y_2\|$$

$$\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|y_1 - y_2\|$$

$$\leq \text{Lip}(f) \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|$$

$$\text{i.e. } \|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{1 - \text{Lip}(f)} \|y_1 - y_2\|$$

$$\text{i.e. } \|(\text{Id} - f)^{-1}(y_1) - (\text{Id} - f)^{-1}(y_2)\| \leq \frac{1}{1 - \text{Lip}(f)} \|y_1 - y_2\|.$$

□

Remarque: le résultat reste vrai localement i.e. $f: \overline{B} \rightarrow \overline{B}$

exemples d'application :

- Cauchy-Lipschitz
- Cauchy-Lipschitz avec dépendance condition initiale
- Théorie d'inversion local
- Fonctions implicites
- etc.

Théorie d'Inversion Local

Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 en x_0 de $\mathbb{R}^d$
 $D_x f$ est inversible. Alors il existe des voisinages
 $U \ni x_0$ et $V \ni f(x_0)$ tels que f est un difféomorphisme
de U dans V .

Preuve : quitte à considérer $g(x) = f(x+x_0) - f(x_0)$
on peut supposer que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$.

Considérons $\varphi(x) := \text{Id} - (D_x f)^{-1} f$, alors

$$\varphi(x) - \varphi(y) = (D_x f)^{-1} [f(x) - f(y) - D_x f(x-y)]$$

Par la formule de Taylor à l'ordre 1

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = o(\|x-y\|) \text{ donc}$$

pour $x, y \in \bar{B}(0, \rho)$ avec ρ assez petit

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|$$

ie φ est Lipschitzien et par la proposition précédente $(\text{Id} - \varphi)$ est inversible ie $(\text{Id} \circ f)^{-1} f$ est inversible et donc f l'est!

Reste à voir que f^{-1} est C^1 ...

□

Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Soit $F: (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$ t.q. $\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq \ell(t) \|x - y\|$
avec $\ell \in L^1_{loc}$

Alors l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

admet une unique solution $(t \mapsto y(t))$ définie sur $\mathbb{R}$.

Preuve: on se place sur $E = C([-T, T], \mathbb{R}^d)$, $\|\cdot\|_\infty$ dont on sait qu'il est complet. On considère

$$\bar{\Phi}: z \in E \mapsto \left(y_0 + \int_0^t F(s, z(s)) ds \right)_{t \in [-T, T]}$$

Alors

$$(\bar{\Phi}(z_1) - \bar{\Phi}(z_2))(t) = \int_0^t (F(s, z_1(s)) - F(s, z_2(s))) ds$$

$$\text{et } \|(\bar{\Phi}(z_1) - \bar{\Phi}(z_2))(t)\| \leq \int_0^t \ell(s) \|z_1(s) - z_2(s)\| ds$$

$$\text{ie } \|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\|_\infty \leq \left(\int_{-T}^T h(s) ds \right) \cdot \|z_1 - z_2\|_\infty$$

Par T assez petit $\int_{-T}^T h(s) ds < 1$

ie Φ est contractile et admet une unique pfixe.
Cela montre que l'équation admet une unique solution
sur $[-T, T]$, existe on recolle! $\square$

4. Théorème de Baire

Théorème (Baire) Dans un espace métrique complet
non vide :

- 1) toute intersection au plus dénombrable d'ouverts denses est dense
- 2) toute union au plus dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide
- 3) si l'espace est réunion au plus dénombrable de fermés, alors l'un d'eux contient un ouvert non vide

Exemple : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, par l'absurde
on applique 3) avec $F_n = \{x\}$, $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$.

Preuve: 1) Soit (Ω_n) une suite d'ouverts denses d'un espace métrique complet (X, d) , et soit U un ouvert non vide de X .

- Comme Ω_1 est dense, $\Omega_1 \cap U$ contient une boule ouverte $B(x_1, r_1)$ et quitte à restreindre $r_1 < 1$, on peut supposer que $\overline{B(x_1, r_1)} \subset \Omega_1 \cap U$
- Comme Ω_2 est dense, $B(x_1, r_1) \cap \Omega_2$ contient une boule ouverte $B(x_2, r_2)$ et quitte à restreindre $r_2 < \frac{1}{2}$ on peut supposer que $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap \Omega_2$
- Par récurrence, on construit alors une suite (x_n) avec $B(x_n, r_n) \subset \overline{B(x_{n-1}, r_{n-1})} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset \overline{B(x_{n-2}, r_{n-2})}$ et $r_n < \frac{1}{n}$.

- Alors, la suite (x_n) est de Cauchy dans (X, d) complet car $\forall m, n \geq N \quad d(x_n, x_m) < \frac{1}{N}$.

(x_n) converge donc vers $x \in X$ et par construction $x \in B_n \quad \forall n$ et $x \in U$

$$\text{ie } U \cap \left(\bigcap_n \Omega_n \right) \neq \emptyset !$$

2) On passe au complémentaire

3) C'est un redite de 2) car il n'y a pas d'intérieur vide.

Proposition : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé admettant une base $(e_n)_{n \geq 1}$ infinie dense, alors $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas complet.

ex: $\mathbb{R}[X]$, $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$ si $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$
n'est pas complet : il admet pour base $e_n(X) = X^n$.

Preuve : Soit $F_n = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors F_n est fermé (de dim finie, donc complet). Par ailleurs F_n est d'intérieur vide. En effet, si ce n'était pas le cas il contiendrait une boule $B(x_n, r_n)$ $x_n \in F_n, r_n > 0$, puis il contiendrait $B(0, r_n)$ par translation de finitude. L'espace tout entier par dilatation. Aussi l'espace serait de dim finie, contradiction.

Par le théorème de Baire, si $(E, \|\cdot\|)$ était complet, on aurait $E = \bigcup F_n$ ce qui contredirait le point 3).

□

Corollaire : Soit X un espace métrique complet qui est réunion dénombrable de fermés : $X = \bigcup_n F_n$.
 Alors $\Omega := \bigcup_n F_n^\circ$ est dense dans X .

Preuve : on définit $F_n' = F_n \cap \Omega^c$ fermé d'intérieur vide (si F_n' contenait un ouvert U , on aurait $U \subset \Omega$)

D'après le théorème de Baire, $\bigcup_n F_n'$ est d'intérieur vide. Alors

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_n F_n = \bigcup_n ((F_n \cap \Omega^c) \cup (F_n \cap \Omega)) \\ &= \bigcup_n F_n' \cup \Omega \\ &= \underbrace{(X \setminus \Omega)}_{\text{Intérieur vide}} \cup \Omega \end{aligned}$$

ie Ω rencontre tout ouvert de X , ie Ω est dense. $\square$

Théorème : Soient (X, d_X) un espace métrique complet et (Y, d_Y) un espace métrique quelconque.

Soient $(f_n) \in C(X, Y)^{\mathbb{N}}$ avec $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X$

Alors il existe une partie dense de X sur laquelle f est continue.

Preuve: • pour $k, n \geq 1$, on pose

$$F_{k,n} = \bigcap_{p,q \geq n} \left\{ x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k} \right\}$$

$F_{k,n}$ est une intersection de fermés, donc fermé.

Par ailleurs, la suite $(f_p(x))$ étant de Cauchy ($\forall x$)

on a

$$X = \bigcup_n F_{k,n}$$

D'après le corollaire ci-dessus, $\Omega_k := \bigcup_n F_{k,n}$ est alors un ouvert dense dans X .

- Si $x \in \Omega_k$, $\exists n$ tel qu'un voisinage $x \in V$ vérifie
 $\forall p, q \geq n \quad d(f_p(y), f_q(y)) < \frac{1}{k} \quad \forall y \in V.$

d'où en faisant $p=n$ et $q=n$

$$d_y(f_n(y), f(y)) < \frac{1}{k}$$

Alors $\forall y \in V$ ($x \in V$)

$$\begin{aligned} d_y(f(n), f(y)) &\leq d_y(f(n), f_0(n)) + d_y(f_0(n), f_0(y)) \\ &\quad + d(f_0(y), f(y)) \\ &\leq \frac{2}{k} + d_y(f_n(n), f_n(y)) \end{aligned}$$

Comme f_n (n fixé) est continue, qu'il s'agit de rendre V , on obtient $d_\gamma(f_n(x), f_n(y)) < \frac{1}{2^n}$

d'où $d(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{2^n}$.

- Les Ω_k étant des ouverts denses, par le th de Baire il existe une nouvelle $\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ être dense. Par construction, f est continue sur Ω . $\square$.

Théorème: L'ensemble des fonctions de $C([0,1], \mathbb{R})$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.