

5. Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evm.

On suppose que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet. On se donne une famille $(T_i)_{i \in I}$ avec $T_i \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si $\forall x \in E$, on a $\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < \infty$

alors $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty$

Preuve: on note $F_n = \{x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i x\|_F \leq n\}$

C'est un fermé, comme intersection (sur I) de fermés $\{x \in E, \|T_i x\|_F \leq n\}$

Par hypothèse, on a $\bigcup_n F_n = E$.

D'après le théorème de Baire, l'un des F_n est alors d'intérieur non vide i.e. $\exists a, r > 0$

$$B(a, r) \subset \overline{B(a, r)} \subset F_n$$

Si $x \in E$ avec $\|x\|_E \leq 1$ alors

$y = a + rx \in B(a, r)$ donc

$\sup_{i \in I} \|T_i y\|_F \leq n$ de sorte que $\forall i \in I$

$$\|T_i\|_F = \|T_i(\frac{y-a}{r})\|_F \leq \frac{1}{r} (\|T_i y\|_F + \|T_i a\|_F) \leq \frac{2n}{r}$$

$$\text{et } \sup_{i \in I} \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T_i x\|_F \leq \frac{2n}{r}$$

$$\text{i.e. } \sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \frac{2n}{r}.$$

□

Corollaire Si $(T_n) \in \mathcal{L}(E, F)^{\mathbb{N}}$ est telle que $\forall x \in E$
 $T_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T x$ dans F alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$
 et $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)}$

Preuve: Pour tout $x \in E$, $(T_n x)$ converge, elle est donc bornée i.e. $\forall x \in E \quad \sup_{n \geq 1} \|T_n x\|_F \leq M(x)$
 D'après le théorème de Banach-Steinhaus, on a alors
 $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq M < \infty$.

En particulier $\forall x \in E, \forall n \geq 1$

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|x\|_E \leq M \|x\|_E$$

et en passant à la limite

$$\|T(x)\|_F \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \|x\|_E.$$

Proposition: Soient E, F, G des e.v.n avec E ou F
 co-f.b. Soit $T: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire. t.q.

$\forall x \in E \quad T_x: y \mapsto T(x, y)$ est continue

$\forall y \in F \quad T_y: x \mapsto T(x, y)$ est continue

alors T est continue, i.e. $\exists M < \infty$ t.q.

$$\|T(x, y)\|_G \leq M \|x\|_E \cdot \|y\|_F.$$

Preuve: Supposons par ex F complet, on note $B = B(0,1)$ dans E
 On considère la famille $(T_x)_{x \in B}$

Pour $x \in B$, $T_x \in \mathcal{L}(F, G)$ et pour tout $y \in F$
 $x \mapsto T_x(y) = T(x, y) \in \mathcal{L}(E, G)$ en particulier
 elle est bornée sur B .

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il
 existe $M < \infty$

$$\sup_{x \in B} \|T_x\|_{\mathcal{L}(F, G)} \leq M$$

$$\text{i.e.} \quad \sup_{x \in B} \sup_{y \in F} \|T(x, y)\|_G \leq M \|y\|_F$$

$$\text{i.e.} \quad \|T(x, y)\|_G \leq M \|x\|_E \|y\|_F, \text{ i.e. } T \text{ continue.}$$

Exemple d'application classique

Sur $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ on considère :

$$T_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\left(\sum_{k=-n}^n e^{ikt} \right)}_{D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} dt.$$

$\forall n \geq 1$, T_n est une forme linéaire continue et

$$\|T_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \right| dt = \|D_n\|_1$$

- Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$
- Ainsi $\|T_n\|$ n'est pas bornée et par le contre-exemple de Banach-Steinhaus il existe nécessairement $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $(T_n f)$ est non bornée en particulier $T_n f = S_n(f)(0)$ ne converge pas.

6. Théorie de l'application ouverte

Théorème : (application ouverte)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors si T est surjective, elle est ouverte i.e. $\forall U \subset E$ ouvert, $T(U)$ est ouvert dans F .

Théorème : (isomorphisme de Banach)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T est bijective alors T^{-1} est continue.

Preuve du second théorème :

Si T est bijective alors d'après le 1^{er} théorème
 $\forall U$ ouvert $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est ouvert
ie T^{-1} est continue.

Preuve du premier théorème :

- Comme T linéaire il suffit de montrer que si
 $B = B_E(0,1)$, alors TB contient une boule
ouverte ie $\exists R > 0$ t_h
 $B_F(0,R) \subset TB_E(0,1)$.

- Comme T est surjective, on a

$$F = \bigcup_m \overline{TB_E(0,n)}.$$

D'après le théorème de Baire $\exists n_0, a \in F, r > 0$
t_h $B_F(a,r) \subset \overline{TB_E(0,n_0)}$

Par symétrie, on a aussi

$$B_F(-a,r) \subset \overline{TB_E(0,n_0)}$$

puis par convexité

$$B_F(0, \frac{r}{2}) \subset \frac{1}{2} (B_F(a,r) + B_F(-a,r)) \subset \overline{TB_E(0,n_0)}$$

$$\text{ie } B_F(0, \frac{r}{2n_0}) \subset \overline{TB_E(0,1)}.$$

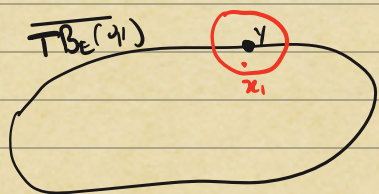
Posons $R = \frac{\epsilon}{hn_0}$ de sorte que

$$B_F(0, 2R) \subset \overline{TB_E(q_1)} \quad (*)$$

Montrons qu'alors $B_F(0, R) \subset \overline{TB_E(q_1)}$.

Si $y \in B_F(0, R)$ alors $y \in \overline{TB_E(q_1)}$ par $(*)$

$$\text{et } \exists x_1 \in B_E(0, \frac{1}{2}) \text{ t.q. } \|y - Tx_1\|_F < \frac{R}{2}$$



Mais alors $(y - Tx_1) \in B_F(q_1, \frac{R}{2}) \subset \overline{TB_E(q_1)}$

donc $\exists x_2 \in B_E(q_1, \frac{1}{4})$ t.q. $\|y - Tx_1 - Tx_2\|_F < \frac{R}{4}$

En itérant le procédé, on construit une suite

$$(x_n) \in B_E(0, \frac{1}{2^n}) \text{ t.q. } \|y - \sum_{i=1}^n Tx_i\|_F \leq \frac{R}{2^n}$$

Par construction $\sum_n \|x_n\| < 1$ donc comme E

est complet $(\sum x_n)$ converge vers $x \in B_E(q_1)$

Par continuité de T et de la norme $\|\cdot\|_F$, on a alors

$$\|y - Tx\|_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - \sum_{i=1}^n Tx_i\|_F = 0$$

ic $y \in \overline{TB_E(q_1)}$, i.e. $B_F(0, R) \subset \overline{TB_E(q_1)}$.

7. Théorie du graphe fermé.

Définition : Si $f: X \rightarrow Y$ est application de X vers Y
son graphe est le ss-ensemble de $X \times Y$ défini par
$$G(f) = \{(u, f(u)), u \in X\}.$$

Proposition : Si $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ est continue,
alors $G(f)$ est fermé.

Preuve : soit $(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n))$ une suite
d'éléments de $G(f)$, qui converge vers
 $(x, y) \in X \times Y$. Alors $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ et par
continuité $y_n = f(x_n) \rightarrow f(x)$ i.e. $y = f(x)$
et $(x, y) \in G(f)$.

Théorème : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux
espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ linéaire.
Alors T continue $\Leftrightarrow G(T)$ fermé dans $E \times F$.

Preuve : on a vu que $\Rightarrow$ est toujours vraie.
reste à montrer $\Leftarrow$.

On suppose donc que $G(T) \subset E \times F$ est fermé
autrement dit $G(T)$ est complet.

L'application $\varphi : \begin{matrix} u \mapsto \varphi(u) = (u, Tu) \\ E \mapsto G(T) \end{matrix}$

est linéaire et bijective. Son inverse vérifie

$$\|\varphi(u)\|_{G(T)} = \|\varphi(u)\|_{E \times F} = \|u\|_E + \|Tu\|_F \geq \|u\|_E$$

$$\text{i.e. } \|\varphi^{-1}(y)\|_E \leq \|y\|_{G(T)}$$

i.e. φ^{-1} est continue.

D'après le théorème de l'application ouverte,
 φ est automatiquement continue de sorte $\exists M$

$$\|\varphi(u)\|_{E \times F} = \|u\|_E + \|Tu\|_F \leq M \|u\|_E$$

en particulier $\|Tu\|_F \leq M \|u\|_E$

i.e. T est continue avec $\|T\| \leq M$.