

FEUILLE D'EXERCICES # 1

Exercice 1 *Sanity check*

Soit (E, d) un espace métrique. Montrez que les boules ouvertes de E sont ouvertes, les boules fermées sont fermées et les sphères sont fermées.

Exercice 2 *Convergence de suite*

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d) .

1. Montrez que pour toute suite (ϵ_n) de réels strictement positifs tendant vers zéro, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) \leq \epsilon_n$ pour tout $n \geq 0$.
2. Montrez que si (x_n) admet une sous-suite convergente, alors (x_n) est elle-même convergente.

Exercice 3 *Moyenne de Cesaro*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe. Soit (u_n) une suite d'éléments de E qui converge vers $u_\infty \in E$.

1. Montrer que la moyenne de Cesaro $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ converge vers u_∞ .
2. Montrer que la suite $v_n = 2 \times \frac{u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n}{n^2}$ converge également vers u_∞ .

Exercice 4 ★ *Suites extraites*

Soient (E, d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E .

1. On suppose que les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{7n}) sont convergentes. Montrer que la suite (u_n) est alors elle-même convergente.
2. Expliciter un exemple de suite réelle (u_n) qui ne converge pas, mais qui est telle que pour tout $k \geq 2$, les sous-suites (u_{kn}) sont convergentes (pensez aux nombres premiers).

Exercice 5 ★ *Inégalités de Hölder et Minkowski*

Soient $(p, q) \in [1, +\infty[$ deux exposants conjugués, i.e. tels que $1/p + 1/q = 1$.

1. Montrer que si a, b sont deux réels alors $|ab| \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. Montrer que si $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

3. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

Exercice 6 ★ *Minorations générales*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe. Montrer que pour tout $u, v \in E$ non nuls

$$\|u - v\| \geq \frac{1}{2} \max(\|u\|, \|v\|) \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\|, \quad \|u - v\| \geq \frac{1}{4} (\|u\| + \|v\|) \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\|.$$

où les constantes $1/2$ et $1/4$ sont optimales.

Exercice 7 *Fonction séparatrice*

Soit (E, d) un espace métrique et A, B des parties non vides de E à distance positive, i.e. vérifiant la minoration $d(A, B) := \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\} > 0$. Pour $u \in E$, on pose

$$f(u) := \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}.$$

1. Montrer que la fonction est bien définie et vérifie $0 \leq f \leq 1$, $f|_A = 0$, $f|_B = 1$.
2. Montrer que f est lipschitzienne, précisément que l'on a pour tout $u, v \in E$

$$|f(u) - f(v)| \leq \frac{d(u, v)}{d(A, B)}.$$

Exercice 8 *Uniforme continuité*

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction continue.

1. Montrez que si f est périodique, elle est uniformément continue.
2. De même si elle admet des limites finies en $\pm\infty$.
3. Montrez que si f est uniformément continue alors pour toute suites réelles $(x_n), (y_n)$ telles que $|x_n - y_n| \rightarrow 0$, on a $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$. En déduire que les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \sin(t^2)$ ne sont pas uniformément continues.

Exercice 9 *Continuité et inverse*

Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \rightarrow F$ une application continue et bijective.

1. On suppose (E, d_E) compact. Montrez que f^{-1} est continue.
2. Que dire dans le cas où $E = [0, 1] \cup [2, 3]$, $F = [0, 2]$ et $f(x) = x$ si $0 \leq x < 1$ et $f(x) = x - 1$ si $2 \leq x \leq 3$?

Exercice 10 *Complétude sur $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$*

Sur l'espace des fonctions continues $E = C^1([-1, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(x)| dx.$$

1. Justifier que les quantités ci-dessus sont bien définies et sont des normes sur E .
2. Montrer que l'espace $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
3. On considère la suite de fonctions (f_n) de E

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Montrer que la suite (f_n) est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Y converge-t-elle?