

FEUILLE D'EXERCICES # 2

Exercice 1 *Sanity check*

Dans la suite, λ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$

1. Donnez un exemple d'une suite bornée de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ convergeant simplement vers 0 mais n'ayant pas de limite dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. Donner un exemple de fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f \notin \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de fonction $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
3. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ -p.p. vers g . Montrer que $g \in \mathbb{L}^p$ et que $f = g$ μ -p.p.
4. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(E, \mathcal{E}, \mu)$ avec $p, q \in [1, +\infty]$ et $p \neq q$. On suppose que $f_n \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \rightarrow \infty$ et que $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \rightarrow 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2 *Lemme de Scheffé*

Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ qui converge μ -p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Indice : appliquer le lemme de Fatou à $g_n = 2^p (|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Exercice 3 ★ *Exposants dans les espaces de Lebesgue*

Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$, avec $\|f\|_\infty > 0$. Pour $0 < p < +\infty$, on pose

$$\varphi(p) := \int_E |f|^p d\mu, \quad \text{et} \quad I := \{p \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(p) < \infty\}.$$

1. Montrer que I est un intervalle (penser à l'inégalité de Hölder).
2. Montrer que $\ln \circ \varphi$ est convexe sur I et que φ est continue sur I .

Exercice 4 *Variante de l'inégalité de Hölder*

Soient $p, q, r \geq 1$ des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $g \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{E}, \mu)$, montrer que $fg \in \mathbb{L}^r(E, \mathcal{E}, \mu)$ avec

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \times \|g\|_q.$$

Exercice 5 ★ *Convergence des normes p*

Soient a, b deux réels avec $a < b$ et soit $f \in \mathbb{L}^\infty([a, b], \lambda)$. Démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Indice : par définition de la norme sup, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $A \subset [a, b]$ tel que $\lambda(\{x \in A, |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$.

Exercice 6 ★ *Sur les espaces de fonctions bornées*

Soient X et E deux espaces vectoriels normés, on note $B(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E et $C_b(X, E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de X dans E . On rappelle que la norme infinie sur $B(X, E)$ est définie par $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions constantes de X dans E , noté $\text{Const}(X, E)$ est un sous-espace fermé de $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ qui est isométrique à E .
2. Montrer que $C_b(X, E)$ est un sous-espace fermé de $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$.
3. Établir que

$$E \text{ est complet} \iff (B(X, E), \|\cdot\|_\infty) \text{ est complet.}$$

Exercice 7 ★ *Transformée de Fourier et lemme de Riemann-Lebesgue*

Pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par la formule

$$(\mathcal{F}f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

1. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}f$ est une fonction continue bornée et que

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1, \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}).$$

2. On suppose que f est dans $C_c^1(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}f$ en fonction de $\mathcal{F}(f')$. En déduire que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0, \quad \forall f \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

3. À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0, \quad \forall f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}).$$

4. Pour tout $a < b$, calculer $\mathcal{F}1_{[a,b]}$ et en déduire une autre démonstration du résultat précédent.

Exercice 8 ★ *Espaces à poids*

Soit $w : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall R > 0, \quad 0 < \inf_{[-R,R]} w \leq \sup_{[-R,R]} w < +\infty.$$

Soit maintenant $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, on définit l'espace à poids

$$C_w(\mathbb{R}, E) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}, E), \quad \|f\|_{\infty, w} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in \mathbb{R}} (w(t) \|f(t)\|_E) < +\infty \right\}.$$

1. Montrer que $C_w(\mathbb{R}, E)$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}, E)$ et que $\|\cdot\|_{\infty, w}$ est une norme sur cet espace.
2. Montrer que si E est complet, alors $C_w(\mathbb{R}, E)$ est complet.