

FEUILLE D'EXERCICES # 3

Exercice 1 *Continue pour une norme, mais pas pour une autre*

Soit $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par $T(P) = P'$. Étudier la continuité de T lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme

1. $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$;
2. $N_2(P) = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

Exercice 2 *Quelques exemples*

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \rightarrow (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} k! |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (F, \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

Exercice 3 *Application identité*

Soit N_1 et N_2 deux normes sur l'espace vectoriel E . Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $Id : (E, N_1) \rightarrow (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \rightarrow (E, N_1)$ sont continues.

Exercice 4 *Applications linéaires sur les polynômes*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E , est continue sur E ?

Exercice 5 *Multiplication sur un espace de polynômes*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme

$$\left\| \sum_{k \geq 0} a_k X^k \right\|_{\infty} = \sup_{k \geq 0} |a_k|.$$

Soit $T : (E, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (E, \|\cdot\|_{\infty})$ définie par $T(P) = XP$. Démontrer que T est continue et calculer sa norme.

Exercice 6 *Jamais continue !*

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \rightarrow E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E , D n'est jamais une application linéaire continue de (E, N) dans (E, N) .

Exercice 7 *Un opérateur sur les fonctions continues*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on définit l'application linéaire $L(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $L(f)(t) := \int_0^1 (t+u)f(u)du$.

1. Justifier que L est un endomorphisme de E .
2. Démontrer que L est continue et calculer sa norme d'opérateur $\|L\|$.

Exercice 8 ★ *Une variante*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$. On considère la forme linéaire $L(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par la formule suivante $L(f) := \int_0^1 f(u)g(u)du$ où $g \in E$ est fixée. Montrer que L est continue de norme $\|L\| = \|g\|_\infty$.

Exercice 9 ★ *Espace de suites*

Soit E l'espace des suites réelles convergeant vers zéro, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$ pour $u = (u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Pour $u \in E$, on définit

$$\varphi(u) := \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{2^n}.$$

1. Montrer que φ est linéaire continue de norme $\|\varphi\| = 1$.
2. Montrer qu'il n'existe aucun $u \in E$, tel que $\|u\|_\infty \leq 1$ et $\varphi(u) = 1$.

Exercice 10 ★ *Intégrale vs somme de Riemann*

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on pose

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(u)du, \quad \varphi_n(f) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que φ et φ_n sont linéaires continues et déterminer leur norme.
2. On pose $\psi_n := \varphi - \varphi_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(f) = 0$ pour tout $f \in E$.
3. Montrer que $\|\psi_n\| = 2$ mais que pour n fixé, il n'existe pas de $g \in E$ avec $\|g\|_\infty \leq 1$ et $|\psi_n(g)| = 2$.