

FEUILLE D'EXERCICES # 5

Exercice 1 ★ Une preuve directe du théorème de Banach–Steinhaus

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé quelconque. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues. On suppose que

$$\forall x \in E, \sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < +\infty$$

On veut montrer que $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(E, F)} < +\infty$. On raisonne par l'absurde.

1. Montrer qu'il existe deux suites $(T_n)_n \subset \{T_i, i \in I\}$ et $(x_n)_n \subset E$ telles que, pour tout $n \geq 1$

$$\|T_n x_n\|_F \geq n + \sum_{j=1}^{n-1} \|T_n x_j\|_F, \quad \|x_n\|_E \leq 2^{-n} \min_{j \leq n-1} \|T_j\|^{-1}.$$

2. Montrer que la série $\sum_n x_n$ converge dans E . On note x sa somme.
3. Montrer pour tout n on a

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \|T_n x_j\|_F \leq 1.$$

4. Montrer enfin que $\|T_n x\|_F \geq n - 1$ pour tout n et conclure.

Exercice 2 ★ Une caractérisation des espaces ℓ^p à la Hölder

Soient $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle et $1 \leq p \leq +\infty$ d'exposant conjugué q . L'objet de l'exercice est de montrer que si pour toute suite $y \in \ell^q$, la série de terme général $(x_n y_n)_n$ est convergente, alors $x \in \ell^p$.

1. Commencer par traiter les cas “faciles” $p = 1$ et $p = \infty$.
2. Lorsque $1 < p < \infty$, on définit les applications linéaires $T_n : \ell^q \rightarrow \ell^q$ par $T_n(y) := \sum_{k=0}^n x_k y_k$. Montrer que ces applications sont continues de norme $\|T_n\| = (\sum_{k=0}^n |x_k|^p)^{1/p}$. Conclure.

Exercice 3 Convergence uniforme

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et N une norme quelconque sur $C(K, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$. On suppose que

- l'espace normé $(C(K, \mathbb{R}), N)$ est complet,
- si une suite $(f_n)_n$ converge dans $(C(K, \mathbb{R}), N)$ vers une limite f , alors $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur K , i.e. pour tout $x \in K$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Montrer que la norme N est alors équivalente à la norme infinie, c'est-à-dire

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad C_2 N(f) \leq \|f\|_{\infty} \leq C_1 N(f), \quad \forall f \in C(K, \mathbb{R}).$$

Exercice 4 Une hypothèse vous manque et...

On considère les espaces $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = C\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \mathbb{R}\right)$ tous deux munis de la norme uniforme. Pour tout $h \in]0, \frac{1}{4}]$, on définit l'opérateur T_h de E dans F comme suit :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \quad T_h(f)(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$$

1. Montrer que $T_h \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(T_{2^{-n}}(f))_n$ converge vers un certain élément g dans F .
En notant $g = T(f)$, l'application T est-elle une application linéaire et continue?
3. Quelle hypothèse manque et met ainsi en défaut le résultat du théorème de Banach–Steinhaus?

Exercice 5 ★ Théorème d'Arzela–Ascoli

Soient K un ensemble compact non vide, (E, d_E) un espace métrique et $C(K, E)$ l'ensemble des fonctions continues de K dans E que l'on munit de distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} d_E(f(x), g(x))$. Montrer qu'une partie A de $C(K, E)$ est relativement compacte (son adhérence est compacte) si et seulement si, pour tout point x de K , les deux points suivants sont vérifiés

1. l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact,
2. A est équicontinue en x , autrement dit pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall f \in A, \quad \forall y \in V, \quad d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exercice 6 ★ Sur les fonctions dérivables

Soit F un sous espace vectoriel fermé de $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme. On suppose que tous les éléments de F sont dérivables.

1. Soit $y_0 \in [0, 1]$ fixé. On pose pour tout $y \in [0, 1]$ différent de y_0 et tout f de F ,

$$L_y(f) = \frac{1}{y - y_0} (f(y) - f(y_0))$$

Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall f \in F, \quad \sup_{y \neq y_0} |L_y(f)| \leq M \|f\|_\infty$$

2. En déduire que la boule unité fermée de F est équicontinue en y_0 .
3. Montrer que la boule unité fermée de F est compacte.
4. Que conclure sur F ?