

FEUILLE D'EXERCICES # 6

Exercice 1 *Identification des normes*

Soit X un espace de Banach, B_X sa boule unité fermée et B_X^* la boule unité fermée de du dual topologique $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. À l'aide du théorème de Hahn–Banach, démontrer les formules suivantes, pour $x_0 \in X$ et $f_0 \in X^*$:

$$\|x_0\|_X = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x_0)|, \quad \|f_0\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f_0(x)|.$$

Les bornes supérieures sont-elles atteintes ?

Exercice 2 ★ *Bornitude*

Soit E un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel normé et A une partie de E , telle que pour tout élément $f \in E^*$ $f(A)$ est une partie bornée de $\mathbb{K}$. Montrer qu'alors A est bornée dans E (la réciproque est claire). Indication : Penser au théorème de Banach–Steinhaus en considérant E comme un sous-espace de son bidual.

Exercice 3 *Sur mesure*

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'éléments de X et $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue f sur X telle que $f(x_i) = c_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 4 *Exemple d'extension*

Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $T : (L^\infty([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ de norme 1 et telle que pour toute $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ on ait $T(f) = f(\frac{1}{2})$.

Exercice 5 *Sur les suites réelles*

1. Pour $x \in \ell^\infty$ on pose $p(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} x(n)$. Montrer que p est positivement homogène, sous-additive et que $p(x) \leq \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \ell^\infty$.
2. On considère le sous-espace c de ℓ^∞ formé par toutes les suites réelles convergentes. À l'aide d'une extension d'une forme linéaire bien choisie sur c , montrer qu'il existe une application linéaire continue $L : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $u \in \ell^\infty$, on ait $\liminf (u_n) \leq L(u) \leq \limsup (u_n)$.
3. Calculer la norme de L et montrer que $L(u) \geq 0$ pour toute suite u bornée et à valeurs positives.
4. On considère $\Phi : \ell^1 \rightarrow (\ell^\infty)^*$ définie par $\Phi(v)(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Rappeler pourquoi Φ est bien définie et continue.
5. Existe-t-il $v \in \ell^1$ tel que $L = \Phi(v)$?

Exercice 6 *Identification d'un dual*

Montrer que ℓ^1 est le dual de c_0 , l'espace des suites de limite nulle, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Construire un élément $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ ne pouvant s'écrire $\varphi(v) = \sum_{n=0}^\infty u_n v_n$ pour un certain $u \in \ell^1$.

Exercice 7 ★ *Unicité du prolongement dans le théorème de Hahn–Banach*

Soit E un espace vectoriel normé et E^* son dual topologique. Notons S la sphère unité de E^* .

1. On suppose que E^* est strictement convexe, c'est-à-dire :

$$\forall \ell_1, \ell_2 \in S, \quad \ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \notin S.$$

Soit F un sous-espace de E , ℓ une forme linéaire continue sur F de norme 1. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire $\tilde{\ell}$ sur E , de norme 1, et prolongeant ℓ .

2. On suppose inversement qu'il existe $\ell_1 \neq \ell_2$ deux éléments de S , vérifiant $\frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \in S$. Montrer qu'il existe alors une forme linéaire continue φ définie sur un sous-espace vectoriel F de E , qui admet deux prolongements linéaires continus distincts sur E ayant la même norme que φ .
3. Trouver un exemple de prolongements multiples de même norme, dans ℓ^1 ainsi que dans ℓ^∞ , de formes linéaires de norme 1.

Exercice 8 ★ *Compacité et convergence faible*

On considère l'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la suite de fonctions $\varphi_n(x) = \mathbb{1}_{[0, 1 - \frac{1}{n}]}(1 - nx)$ est dans la sphère unité de E mais qu'aucune suite extraite de φ_n ne peut converger faiblement vers un élément de E . Que peut-on en déduire? Indication : Pour l'impossibilité de l'extraction convergente, vérifier que la convergence faible dans E implique la convergence simple.

Exercice 9 *Équivalence de normes*

Soit E un espace muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ telles que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ soient des espaces de Banach. On suppose que l'une des normes domine l'autre, par exemple :

$$\exists C > 0, \quad \forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq C\|x\|_2.$$

Montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 10 ★ *Jauge d'un convexe*

Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe ouvert d'un espace de Banach E avec $0 \in \mathcal{C}$. Soit $x \in E$. On note $J(x) := \inf\{r > 0; x/r \in \mathcal{C}\}$ sa jauge.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $J(x)$ est fini.
2. Montrer que J est une sous-norme sur E , i.e.

$$\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}^+, \quad J(\lambda x) = \lambda J(x) \quad \text{et} \quad J(x + y) \leq J(x) + J(y).$$

3. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $0 \leq J(x) \leq M\|x\|, \forall x \in E$ (donc J est continue).
4. Montrer que $\mathcal{C} = \{x \in E; J(x) < 1\}$.