

ENTRAÎNEMENT CONTRÔLE CONTINU

Durée 2h, aucun document autorisé.

Exercice 1 Questions de cours

1. Énoncer le théorème du point fixe de Banach–Picard.
2. Énoncer les théorèmes de l’application ouverte et d’isomorphisme de Banach.

Exercice 2 Théorème de Radon–Nikodym à la Von Neumann

Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et λ et μ deux mesures finies sur $(E, \mathcal{E})$ avec $\lambda \ll \mu$.

1. On définit $\sigma := \lambda + \mu$. Montrer que si $A \in \mathcal{E}$, on a $\sigma(A) = 0$ ssi $\mu(A) = 0$.
2. On définit $T : \mathbb{L}^2(E, \mathcal{E}, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$T(g) := \int_E g(x) \mu(dx).$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu sur $\mathbb{L}^2(E, \mathcal{E}, \sigma)$.

3. En déduire qu’il existe une fonction $f \in \mathbb{L}^2(E, \mathcal{E}, \sigma)$ telle que

$$T(g) = \int_E g(x) f(x) \sigma(dx).$$

4. Montrer que la fonction f vérifie $0 < f(x) \leq 1$ pour σ et μ presque tout $x \in E$.
5. Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est intégrable contre la mesure μ .
Indice : on pourra considérer dans un premier temps la fonction $\frac{1}{f} \times \mathbb{1}_{f > \frac{1}{n}}$, puis faire tendre n vers l’infini.
6. Montrer que la fonction $f^* := \frac{1}{f} - 1$ est la dérivée de Radon–Nikodym de λ par rapport à μ .

Exercice 3 Théorème de l’application ouverte

On désigne par c_{00} l’espace vectoriel des suites réelles $(x_n)_{n \geq 1}$, nulles à partir d’un certain rang, que l’on munit de la norme $\|x\|_\infty := \sup_{n \geq 1} |x_n|$. On définit sur c_{00} l’application

$$T(x) = \left(\frac{x_n}{n} \right)_{n \geq 1}, \quad \text{si } x = (x_n)_{n \geq 1}.$$

1. Montrer que T est une application linéaire continue de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même.
2. Montrer que T admet un inverse explicite, qui lui n’est pas continu sur $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 4 *Sur la convergence faible*

Pour $1 < p < +\infty$, on considère les espaces de Lebesgue $\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue et la suite de fonction (f_n) définie par

$$f_n(x) := \sqrt{n} \mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x), \quad x \geq 0.$$

1. Pour quelles valeurs de l'exposant p la suite (f_n) converge-t-elle fortement vers zéro – i.e. au sens de la norme $\|\cdot\|_p$ – lorsque n tend vers l'infini ?
2. Dans le cas où $p = 2$, montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite (f_n) converge faiblement vers zéro.

Indice : on pourra appliquer l'inégalité de Hölder en remarquant que $\mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x) = \mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x) \times \mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x) !$

3. Bonus : Lorsque $p > 2$, est-il vrai que la suite (f_n) converge à nouveau faiblement vers zéro ?