

CONTRÔLE CONTINU # 2
durée 2h00, aucun document autorisé.

Exercice 1 *Convergence de processus*

On considère deux suites indépendantes $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $n \geq 1$, on définit alors le processus $(X_n(t))_{t \in \mathbb{R}}$ par la formule :

$$X_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{kt}{n}\right) + b_k \sin\left(\frac{kt}{n}\right).$$

1. Montrer que le processus $(X_n(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien centré et préciser sa fonction de covariance.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables $X_n(t)$ et $X'_n(t) := \frac{d}{dt} X_n(t)$ sont indépendantes.
3. Montrer que pour tout $t = (t_1, \dots, t_d)$, le vecteur $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_d))$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini, vers un vecteur gaussien centré dont on précisera la matrice de covariance.
4. Pour $s, t \in \mathbb{R}$, majorer $\mathbb{E}[|X_n(t) - X_n(s)|^2]$ en fonction de $|t - s|^2$ et en déduire que la suite de processus $(X_n(t))_{t \geq 0}$ converge en loi – dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la topologie uniforme sur les compacts – vers un processus gaussien explicite.
5. Bonus. On suppose maintenant que les variables (a_k) et (b_k) sont des variables de Rademacher, i.e. $\mathbb{P}(a_k = 1) = \mathbb{P}(a_k = -1) = 1/2$, toutes indépendantes. Montrer que la conclusion de la question 4 est encore vraie.

Exercice 2 *Comportement asymptotique d'un processus stochastique*

Dans cet exercice, on pourra admettre la loi de grand nombres et le théorème limite central suivants, qui sont des conséquences de la représentation brownienne de Dambis–Dubins–Schwarz des martingales. Si (M_t) est une martingale continue de carré intégrable, issue de zéro, dont la variation quadratique vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle M, M \rangle_t = +\infty$ presque sûrement, alors

$$\text{LGN : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_t}{\sqrt{\langle M, M \rangle_t}} = 0 \text{ } \mathbb{P} - ps, \quad \text{TLC : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_t}{\sqrt{\langle M, M \rangle_t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel. L'objet de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique lorsque t tend vers l'infini du processus $Z_t := \int_0^t \sin(B_s) ds$.

1. En appliquant la formule d'Itô, montrer qu'il existe une martingale locale (M_t) telle que pour $t \geq 0$

$$\sin(B_t) = M_t - \frac{1}{2} Z_t. \quad (\star)$$

Justifier que la martingale locale (M_t) est en fait une “vraie” martingale de carré intégrable.

2. Expliciter la variation quadratique $\langle M, M \rangle_t$ de M_t . En déduire que lorsque t tend vers l'infini, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Z_t}{t} = 0$ presque sûrement.

3. Écrire la décomposition d'Itô du processus $\sin^2(B_t)$ et en déduire que lorsque t tend vers l'infini,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos^2(B_s) ds = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P} - ps.$$

4. Toujours à partir de la décomposition d'Itô du processus $\sin^2(B_t)$, expliciter une équation différentielle satisfaite par la fonction $f(t) := \int_0^t \mathbb{E}[\sin^2(B_s)] ds$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[\sin^2(B_t)]$ pour tout $t \geq 0$ et sa limite lorsque t tend vers l'infini.
5. Des questions 1,2,3, déduire le théorème limite central suivant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Z_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{loi} \mathcal{N}(0, 2).$$

Exercice 3 *Bonus, intégrale au sens de Stratonovich*

Soient $T > 0$ et $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien réel. Soient $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ une partition de l'intervalle $[0, T]$ et $(e_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus élémentaire adapté à la filtration naturelle brownienne

$$e_t = \sum_{k=1}^N e_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{]t_{k-1}, t_k]}(t).$$

L'intégrale de Stratonovich du processus e_t contre le mouvement brownien est alors définie par :

$$\int_0^T e_t \circ dB_t := \sum_{k=1}^n \frac{e_{t_{k-1}} + e_{t_k}}{2} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

Autrement dit, si l'intégrale d'Itô correspond à une méthode d'intégration "rectangle à gauche", l'intégrale de Stratonovich correspond à une méthode d'intégration "point milieu". L'intégrale de Stratonovich $\int_0^T X_t \circ dB_t$ d'un processus adapté $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est alors définie comme la limite en probabilité d'une suite $\int_0^T X_t^n \circ dB_t$ où X^n est une suite de processus élémentaires convergeant vers X dans $\mathbb{L}^2$. On admettra que cette limite existe et qu'elle est indépendante de la suite approximante.

1. Calculer l'intégrale au sens de Stratonovich

$$\int_0^T B_t \circ dB_t.$$

2. Plus généralement, si f est une fonction de classe C^2 , en effectuant un développement limité à l'ordre un, montrer que

$$\int_0^T f'(B_t) \circ dB_t = f(B_T) - f(B_0).$$

3. Soit g une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et soit X_t un processus adapté vérifiant la relation

$$X_t = \int_0^t g(X_s) \circ dB_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Soit Y_t le processus défini par l'intégrale d'Itô

$$Y_t = \int_0^t g(X_s) dB_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Montrer que pour tout $t \in [0, T]$

$$X_t - Y_t = \frac{1}{2} \int_0^t g(X_s) g'(X_s) ds.$$