

CONTRÔLE CONTINU # 2

Exercice 1 *Convergence de processus*

On considère deux suites indépendantes $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $n \geq 1$, on définit alors le processus $(X_n(t))_{t \in \mathbb{R}}$ par la formule :

$$X_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{kt}{n}\right) + b_k \sin\left(\frac{kt}{n}\right).$$

1. Montrer que le processus $(X_n(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien centré et préciser sa fonction de covariance.

Le processus est clairement centré. C'est un processus gaussien car toute combinaison linéaire des $X_n(t)$ s'écrit in fine comme une combinaison linéaire des a_k, b_k qui sont des gaussiennes indépendantes. Enfin, pour $s, t \in \mathbb{R}$, on a par indépendance des suites (a_k) et (b_k)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n(t)X_n(s)] &= \frac{1}{n} \sum_{k, \ell=1}^n \left(\mathbb{E}[a_k a_\ell] \cos\left(\frac{kt}{n}\right) \cos\left(\frac{\ell s}{n}\right) + \mathbb{E}[b_k b_\ell] \sin\left(\frac{kt}{n}\right) \sin\left(\frac{\ell s}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{kt}{n}\right) \cos\left(\frac{ks}{n}\right) + \sin\left(\frac{kt}{n}\right) \sin\left(\frac{ks}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k(t-s)}{n}\right). \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables $X_n(t)$ et $X'_n(t) := \frac{d}{dt} X_n(t)$ sont indépendantes.

Comme plus haut, on montre que le processus $(X_n(t), X'_n(t))$ est gaussien. D'après la question précédente, en faisant $s = t$, on a $\mathbb{E}[X_n(t)^2] = 1$, et en dérivant sous le signe somme, on obtient $2\mathbb{E}[X_n(t)X'_n(t)] = 0$, autrement dit les variables gaussiennes $X_n(t)$ et $X'_n(t)$ sont orthogonales, i.e. indépendantes.

3. Montrer que pour tout $t = (t_1, \dots, t_d)$, le vecteur $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_d))$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini, vers un vecteur gaussien centré dont on précisera la matrice de covariance.

La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien s'exprimant comme une fonction du vecteur des moyennes et de la matrice de covariance, la suite de vecteurs gaussiens centrés $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_d))$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini si et seulement la suite des matrices de covariances associée est elle-même convergente. D'après la question 1, on a pour $i, j \in [1, d]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_n(t_i)X_n(t_j)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k(t_i - t_j)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \cos(u(t_i - t_j)) du = \frac{\sin(t_i - t_j)}{t_i - t_j}.$$

où on a reconnu une somme de Riemann, et où par continuité/convention $\sin(0)/0 = 1$. Autrement dit, lorsque n tend vers l'infini, le processus $(X_n(t))$ converge au sens des marginales de dimension finies vers un processus gaussien centré dont la fonction de covariance est la fonction sinus cardinal.

4. Pour $s, t \in \mathbb{R}$, majorer $\mathbb{E}[|X_n(t) - X_n(s)|^2]$ en fonction de $|t - s|^2$ et en déduire que la suite de processus $(X_n(t))_{t \geq 0}$ converge en loi – dans $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la topologie uniforme sur les compacts – vers un processus gaussien explicite.

En utilisant l'indépendance des variables a_k, b_k , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n(t) - X_n(s)|^2] &= \frac{1}{n} \sum_{k, \ell=1}^n \left[\left(\cos\left(\frac{kt}{n}\right) - \cos\left(\frac{\ell s}{n}\right) \right)^2 + \left(\sin\left(\frac{kt}{n}\right) - \sin\left(\frac{\ell s}{n}\right) \right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left[1 - \cos\left(\frac{k(t-s)}{n}\right) \right] \\ &= \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{k(t-s)}{2n}\right) \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \right) |t-s|^2 \leq |t-s|^2. \end{aligned}$$

D'après le critère de tension vu en cours, cela assure que la suite des lois des processus (X_n) est tendue. En combinant ce résultat à la convergence des marginales de dimensions finies obtenu à la question 3, cela assure la convergence au sens des processus pour la topologie mentionnée.

5. Bonus. On suppose maintenant que les variables (a_k) et (b_k) sont des variables de Rademacher, i.e. $\mathbb{P}(a_k = 1) = \mathbb{P}(a_k = -1) = 1/2$, toutes indépendantes. Montrer que la conclusion de la question 4 est encore vraie.

Le calcul de la question 4 s'étend verbatim, donc le critère de tension est encore vérifié. Par ailleurs, le théorème limite central multidimensionnel assure que pour tout $(t_1, \dots, t_d)$, le vecteur aléatoire $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_d))$ (qui n'est plus gaussien) converge en loi vers un vecteur gaussien avec la bonne matrice de covariance. On conclut comme plus haut.

Exercice 2 *Comportement asymptotique d'un processus stochastique*

Dans cet exercice, on pourra admettre la loi de grand nombres et le théorème limite central suivants, qui sont des conséquences de la représentation brownienne de Dambis–Dubins–Schwarz des martingales. Si (M_t) est une martingale continue de carré intégrable, issue de zéro, dont la variation quadratique vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle M, M \rangle_t = +\infty$ presque sûrement, alors

$$\text{LGN : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_t}{\sqrt{\langle M, M \rangle_t}} = 0 \quad \mathbb{P} - ps, \quad \text{TLC : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_t}{\sqrt{\langle M, M \rangle_t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

Soit (B_t) un mouvement brownien réel. L'objet de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique lorsque t tend vers l'infini du processus $Z_t := \int_0^t \sin(B_s) ds$.

1. En appliquant la formule d'Itô, montrer qu'il existe une martingale locale (M_t) telle que pour $t \geq 0$

$$\sin(B_t) = M_t - \frac{1}{2} Z_t. \quad (\star)$$

Justifier que la martingale locale (M_t) est en fait une “vraie” martingale de carré intégrable.

On applique la formule d'Itô à la fonction $x \mapsto \sin(x)$ qui est bien de classe C^2

$$\sin(B_t) = \sin(B_0) + \underbrace{\int_0^t \cos(B_s) dB_s}_{:= M_t} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^t \sin(B_s) ds}_{:= Z_t}.$$

On a clairement $|Z_t| \leq t$ de sorte que par l'équation $(\star)$, on a $|M_t| \leq \frac{t}{2} + 1$, en particulier (M_t) est de carré intégrable.

2. Expliciter la variation quadratique $\langle M, M \rangle_t$ de M_t . En déduire que lorsque t tend vers l'infini, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Z_t}{t} = 0$ presque sûrement.

Le calcul de la variation quadratique donne pour tout $t \geq 0$

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t \cos^2(B_s) ds \leq t.$$

Par suite, d'après la loi des grands nombres rappelée ci-dessus, on a

$$\frac{M_t}{t} = \underbrace{\frac{M_t}{\langle M, M \rangle_t}}_{\substack{\text{LGN, } ps \\ t \rightarrow +\infty \rightarrow 0}} \times \underbrace{\frac{\langle M, M \rangle_t}{t}}_{\leq 1} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{ps} 0.$$

Comme la fonction $\sin$ est bornée, on déduit alors de l'équation $(\star)$ que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Z_t}{t} = 0$ presque sûrement.

3. Écrire la décomposition d'Itô du processus $\sin^2(B_t)$ et en déduire que lorsque t tend vers l'infini,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \cos^2(B_s) ds = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P} - ps.$$

La fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ étant de classe C^2 , d'après la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} \sin^2(B_t) &= \sin^2(B_0) + \underbrace{2 \int_0^t \sin(B_s) \cos(B_s) dB_s}_{:= N_t, \text{ mart. loc.}} + \frac{1}{2} \int_0^t (\cos^2(B_s) - \sin^2(B_s)) ds \\ &= N_t + \int_0^t \cos^2(B_s) ds - \frac{t}{2}. \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Comme dans la question précédente, on a $\langle N, N \rangle_t = 4 \int_0^t \sin^2(B_s) \cos^2(B_s) ds \leq t$ de sorte que par la loi des grands nombres pour les martingales, N_t/t tend presque sûrement vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Comme $\sin^2$ est bornée, l'équation $(\star\star)$ assure alors que $\langle M, M \rangle_t/t$ tend presque sûrement vers $1/2$ lorsque t tend vers l'infini.

4. Toujours à partir de la décomposition d'Itô du processus $\sin^2(B_t)$, expliciter une équation différentielle satisfaite par la fonction $f(t) := \int_0^t \mathbb{E}[\sin^2(B_s)] ds$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[\sin^2(B_t)]$ pour tout $t \geq 0$ et sa limite lorsque t tend vers l'infini.

L'équation $(\star\star)$ peut s'écrire sous la forme alternative

$$\sin^2(B_t) = N_t + \frac{t}{2} - \int_0^t \sin^2(B_s) ds,$$

et comme N_t est une martingale de carré intégrable, en prenant l'espérance on obtient l'équation différentielle

$$f(0) = 0, \quad f'(t) = \frac{t}{2} - f(t).$$

En multipliant par e^t , on trouve $(f(t)e^t)' = \frac{t}{2}e^t$ autrement dit

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} \int_0^t se^s ds \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}(t - (1 - e^{-t})),$$

de sorte que $\mathbb{E}[\sin^2(B_t)] = f'(t) = \frac{1-e^{-t}}{2} \rightarrow 1/2$ lorsque t tend vers l'infini.

5. Des questions 1,2,3, déduire le théorème limite central suivant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{Z_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{loi} \mathcal{N}(0, 2).$$

Par l'équation (*), on a (pour un grand O déterministe)

$$\frac{Z_t}{\sqrt{t}} = 2 \frac{M_t}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{Z_t}{\sqrt{t}} &= 2 \times \frac{M_t}{\sqrt{\langle M, M \rangle_t}} \times \sqrt{\frac{\langle M, M \rangle_t}{t}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ &= 2 \times \underbrace{\frac{M_t}{\sqrt{\langle M, M \rangle_t}}}_{\substack{\text{TLC, loi} \\ t \rightarrow +\infty \rightarrow \mathcal{N}(0,1)}} \times \underbrace{\sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \cos^2(B_s) ds}}_{\substack{\text{Q3, ps} \\ t \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{Slutzky, loi}} \mathcal{N}(0, 2). \end{aligned}$$

Exercice 3) *Bonus, intégrale au sens de Stratonovich*

Soient $T > 0$ et $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien réel. Soient $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ une partition de l'intervalle $[0, T]$ et $(e_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus élémentaire adapté à la filtration naturelle brownienne

$$e_t = \sum_{k=1}^N e_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{[t_{k-1}, t_k[}(t).$$

L'intégrale de Stratonovich du processus e_t contre le mouvement brownien est alors définie par :

$$\int_0^T e_t \circ dB_t := \sum_{k=1}^n \frac{e_{t_{k-1}} + e_{t_k}}{2} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

Autrement dit, si l'intégrale d'Itô correspond à une méthode d'intégration "rectangle à gauche", l'intégrale de Stratonovich correspond à une méthode d'intégration "point milieu". L'intégrale de Stratonovich $\int_0^T X_t \circ dB_t$ d'un processus adapté $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est alors définie comme la limite d'une suite $\int_0^T X_t^n \circ dB_t$ où X^n est une suite de processus élémentaires convergeant vers X dans $\mathbb{L}^2$. On admettra que cette limite existe et qu'elle est indépendante de la suite approximante.

1. Calculer l'intégrale au sens de Stratonovich

$$\int_0^T B_t \circ dB_t.$$

Par définition, l'intégrale à calculer est la limite d'intégrales élémentaires correspondant à une approximation de l'intégrande sur $[0, T]$. Choisissons une telle approximation, par exemple

$$B_t^n := \sum_{k=1}^{2^n} B_{\frac{(k-1)T}{2^n}} \mathbb{1}_{\left[\frac{(k-1)T}{2^n}, \frac{kT}{2^n}\right]}(t).$$

On a alors, le long de la subdivision dyadique

$$\begin{aligned}\int_0^T B_t^n \circ dB_t &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}} + B_{\frac{kT}{2^n}}\right)}{2} \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{\frac{kT}{2^n}}^2 - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}^2\right) = \frac{B_T^2}{2}\end{aligned}$$

En passant à limite en n , on obtient donc simplement

$$\int_0^T B_t \circ dB_t = \frac{B_T^2}{2}$$

2. Plus généralement, si f est une fonction de classe C^2 , en effectuant un développement limité à l'ordre un, montrer que

$$\int_0^T f'(B_t) \circ dB_t = f(B_T) - f(B_0).$$

Comme plus haut, en passant par une approximation dyadique de l'intégrande, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T f'(B_t^n) \circ dB_t &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) + f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right)}{2} \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right) - f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right)}{2} \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2^n} f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \left(B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right),\end{aligned}$$

autrement dit, la différence entre les intégrales de Stratonovich et d'Itô du processus élémentaire $f'(B_t^n)$ s'écrit

$$\int_0^T f'(B_t^n) \circ dB_t - \int_0^T f'(B_t^n) dB_t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} \left[f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right) - f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \right] \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}} \right].$$

Or la formule de Taylor à l'ordre 1 donne

$$f'\left(B_{\frac{kT}{2^n}}\right) - f'\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) = f''\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right] + o\left(\left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right]\right).$$

En injectant cet estimé dans la dernière équation, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^T f'(B_t^n) \circ dB_t - \int_0^T f'(B_t^n) dB_t &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} f''\left(B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right) \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right]^2 \\ &\quad + o\left(\sum_{k=1}^{2^n} \left[B_{\frac{kT}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)T}{2^n}}\right]^2\right).\end{aligned}$$

Par définition de la variation quadratique, lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du membre de droite converge en probabilité vers

$$\frac{1}{2} \int_0^T f''(B_t) dt.$$

Par ailleurs, le reste est un petit o de la variation quadratique du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$, qui vaut donc T . Autrement, le reste converge vers zero en probabilité lorsque n tend vers l'infini. Finalement, en passant à la limite, on obtient

$$\int_0^T f'(B_t) \circ dB_t = \int_0^T f'(B_t) \circ dB_t + \frac{1}{2} \int_0^T f''(B_t) dB_t,$$

et par la formule d'Itô, le membre de droite est égal à $f(B_T) - f(B_0)$ d'où

$$\int_0^T f'(B_t) \circ dB_t = f(B_T) - f(B_0).$$

3. Soit g une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et soit X_t un processus adapté vérifiant la relation

$$X_t = \int_0^t g(X_s) \circ dB_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Soit Y_t le processus défini par l'intégrale d'Itô

$$Y_t = \int_0^t g(X_s) dB_s, \quad \forall t \in [0, T].$$

Montrer que pour tout $t \in [0, T]$

$$X_t - Y_t = \frac{1}{2} \int_0^t g(X_s) g'(X_s) ds.$$

Fixons $0 \leq t \leq T$. On revient à la définition des deux intégrales en terme de processus élémentaires. Sur une subdivision dyadique de $[0, t]$, on approche le processus X par le processus élémentaire

$$X_s^n := \sum_{k=1}^{2^n} X_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \mathbb{1}_{[\frac{(k-1)t}{2^n}, \frac{kt}{2^n}]}(s).$$

On a alors d'une part

$$\int_0^t g(X_s^n) \circ dB_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} \left[g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) + g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) \right] \left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right],$$

et d'autre part, on a aussi

$$\int_0^t g(X_s^n) dB_s = \sum_{k=1}^{2^n} \left[g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) \right] \left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right].$$

En faisant la différence, il vient

$$\begin{aligned}\Delta_n &:= \int_0^t g(X_s^n) \circ dB_s - \int_0^t g(X_s^n) dB_s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} \left[g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) - g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) \right] \left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right].\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la formule de Taylor à l'ordre 1, on a

$$g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) - g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) = g'\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) \left(X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) + o\left(X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right)$$

et l'équation vérifiée par X nous donne que

$$X_{\frac{kt}{2^n}} - X_{\frac{(k-1)t}{2^n}} = \frac{1}{2} \left(g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) + g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) \right) \left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right] + o\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right].$$

En injectant cet estimé dans l'expression de Δ_n , on obtient alors

$$\begin{aligned}\Delta_n &:= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} g'\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) \frac{1}{2} \left(g\left(X_{\frac{(k-1)t}{2^n}}\right) + g\left(X_{\frac{kt}{2^n}}\right) \right) \left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right]^2 \\ &\quad + o\left(\left[B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}} \right]^2\right),\end{aligned}$$

qui tend en probabilité lorsque n tend vers l'infini vers $\frac{1}{2} \int_0^t g(X_s)g'(X_s)ds$, d'où le résultat.