

DEVOIR EN TEMPS LIBRE

Dans ce devoir, on se propose d'étudier le module de continuité du mouvement brownien. Le théorème suivant est dû à Paul Lévy.

Théorème 1 (Module de continuité de Lévy). *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit h la fonction définie sur $(0, +\infty)$ par $h(t) := \sqrt{2t \log(1/t)}$. Alors on a*

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq s < t \leq 1 \\ t-s \leq \varepsilon}} \frac{|B_t - B_s|}{h(\varepsilon)} \right) = 1 \right) = 1.$$

Démonstration. On cherche tout d'abord à montrer que la lim sup de l'énoncé du théorème est presque sûrement plus grande que 1. Pour cela, on fixe $\delta \in (0, 1)$ et on considère les événements A_n définis par

$$A_n := \left\{ \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left| B_{\frac{k}{2^n}} - B_{\frac{k-1}{2^n}} \right| \leq (1 - \delta)h(2^{-n}) \right\}.$$

1. Montrer que l'on a la majoration

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \left(1 - 2 \int_{(1-\delta)\sqrt{2n \log(2)}}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \right)^{2^n}.$$

2. Via une intégration par parties, montrer que pour $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2} dx > \frac{a}{1+a^2} e^{-a^2/2}.$$

3. En utilisant le fait que $1 - s \leq e^{-s}$, en déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \exp \left(-C \frac{2^{n(1-(1-\delta)^2)}}{\sqrt{n}} \right).$$

4. Conclure, en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, que la lim sup de l'énoncé du théorème est effectivement presque sûrement plus grande que 1.

On cherche maintenant à montrer que la lim sup de l'énoncé du théorème est plus petite que 1. Pour cela, on fixe à nouveau $\delta \in (0, 1)$ et $\varepsilon > 0$ tel que $(1 + \varepsilon)^2(1 - \delta) > 1 + \delta$. On désigne par K_n l'ensemble des couples d'entiers (i, j) tels que $0 \leq i < j < 2^n$ and $0 < j - i \leq 2^{n\delta}$. Enfin, on considère les événements $\tilde{A}_n$ définis par

$$\tilde{A}_n = \left\{ \sup_{\substack{(i,j) \in K_n \\ j-i=k}} \frac{|B_{\frac{j}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}}|}{h(k2^{-n})} \geq (1 + \varepsilon) \right\}.$$

5. En utilisant l'inégalité

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2/2} dx < \frac{e^{-a^2/2}}{a},$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui peut changer de ligne à ligne), telle que l'on ait les majorations

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{A}_n) &\leq C \times \sum_{\substack{(i,j) \in K_n \\ j-i=k}} \int_{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log(k^{-1}2^n)}}^{+\infty} e^{-x^2/2}. \\ &\leq C \times \sum_{\substack{(i,j) \in K_n \\ j-i=k}} \frac{1}{\sqrt{\log(k^{-1}2^n)}} \exp(-(1+\varepsilon)^2 \log(k^{-1}2^n)) \\ &\leq C \times 2^{-n(1-\delta)(1+\varepsilon)^2} \sum_{\substack{(i,j) \in K_n \\ j-i=k}} \frac{1}{\sqrt{\log(k^{-1}2^n)}}. \end{aligned}$$

6. En majorant le nombre de points dans K_n , en déduire que

$$\mathbb{P}(\tilde{A}_n) \leq \frac{C}{\sqrt{n}} 2^{n((1+\delta)-(1-\delta)(1+\varepsilon)^2)}.$$

7. En utilisant à nouveau le lemme de Borel-Cantelli, en déduire que pour $n \geq n_0 = n_0(\omega)$ assez grand, on a pour tout $(i, j) \in K_n$ avec $j - i = k$:

$$\left| B_{\frac{j}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}} \right| < (1 + \varepsilon) h(k 2^{-n}).$$

8. Conclure en utilisant la continuité des trajectoires browniennes.

□

La loi du logarithme itéré énoncée ci-dessous précise l'entendue typique des trajectoires browniennes en temps court comme en temps long.

Théoreme 2 (Loi du logarithme itéré). *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit la fonction $\log_2$ sur $(1, +\infty)$ par $\log_2(x) = \log(\log(x))$. Alors, au voisinage de zéro, on a*

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = 1 \right) = \mathbb{P} \left(\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(1/t)}} = -1 \right) = 1.$$

Au voisinage de l'infini, on a de même

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(t)}} = 1 \right) = \mathbb{P} \left(\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log_2(t)}} = -1 \right) = 1.$$

Démonstration. Elle est similaire à celle du théorème concernant le module de continuité : en utilisant deux fois le lemme de Borel-Cantelli, on montre que presque sûrement, la première $\limsup$ est à la fois plus grande et plus petite que 1. Le résultat concernant la $\liminf$ découle immédiatement car B et $-B$ ont même loi. Enfin, l'inversion du temps $B_t \rightarrow tB_{1/t}$ permet de passer du comportement en temps court à celui du comportement en temps long. □