

FEUILLE D'EXERCICES # 2

Exercice 1 *Mouvement brownien sur le cercle*

Si $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et si φ la surjection canonique de $\mathbb{R}$ sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on appelle $\varphi \circ B$ mouvement brownien sur le cercle. On pose

$$T := \inf\{t \geq 0, \varphi \circ B([0, t]) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\varphi(B_T)$, le dernier point visité par le mouvement brownien sur le cercle, est uniformément réparti sur le cercle.

Exercice 2 *Dernière visite en zéro*

Soit $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ un mouvement brownien et soit

$$T := \sup\{t \in [0, 1], B_t = 0\}$$

l'instant du “dernier zéro”. Montrer que B change de signe infiniment souvent juste avant T , à savoir, qu'il existe (t_n) une suite croissante tendant vers T telle que pour tout n , on ait $B_{t_{2n}} > 0$ et $B_{t_{2n+1}} < 0$. On pourra penser à introduire, pour q rationnel, le temps d'arrêt $T_q := \inf\{t \geq q, B_t = 0\}$.

Exercice 3 *Martingale exponentielle*

Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée et B un mouvement brownien. Montrer que le processus

$$Z_t = \int_0^t f(s) dB_s$$

est un processus gaussien et expliciter sa fonction de covariance $\Gamma(s, t)$. Montrer que le nouveau processus $\exp\{Z_t - \frac{1}{2}\Gamma(t, t)\}$ est une martingale.

Exercice 4 *Une intégrale stochastique*

On considère un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$ et la variable aléatoire $Z := \int_0^1 t dB_t$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de Z .
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que $Z = B_1 - \int_0^1 B_t dt$.
3. En interprétant la dernière intégrale comme une somme de Riemann, montrer que Z est une variable gaussienne, dont on précisera la loi.
4. Montrer que (B_1, Z) est un vecteur gaussien et en déduire $\mathbb{E}[B_1|Z]$.

Exercice 5 ★ *Support des trajectoires browniennes*

1. Soient $\varepsilon > 0$ et B un mouvement brownien. En utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}([0, 1])$, montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ telle que

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, 1], |B_t - f(t)| \leq \varepsilon) > 0$$

2. En déduire que

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, 1], |B_t| \leq \varepsilon) > 0.$$

3. Soit X une gaussienne de variance 1 indépendante de B . Montrer que $(B_t - tB_1 + tX)_{0 \leq t \leq 1}$ est un mouvement brownien. En déduire que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, 1], |B_t - \alpha t| \leq \varepsilon) > 0.$$

4. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on a

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, 1], |B_t - f(t)| \leq \varepsilon) > 0$$

5. Montrer qu'il existe des constantes $C, c > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, 1], |B_t| \leq \varepsilon) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon^2}\right).$$

Exercice 6 *Brownien déguisé*

Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle. On admet l'existence d'un processus continu et adapté X issu de $X_0 = 0$ et vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante, pour tout $0 \leq t < \tau := \inf\{s > 0, X_s \notin]-\pi/2, \pi/2[\}$

$$X_t = - \int_0^t \frac{\tan(X_s) ds}{(1 + \tan(X_s)^2)^2} + \int_0^t \frac{dB_s}{1 + \tan(X_s)^2}.$$

1. Que dire du processus $(Y_t)_{0 \leq t < \tau}$ défini par $Y_t := \tan(X_t)$?
2. En déduire que $\tau = +\infty$ presque sûrement et que $(X_t)_{0 \leq t < \tau}$ est récurrent dans $] -\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 7 *Loi des temps d'atteinte*

Soient (B_t) un mouvement brownien et $T_1^* := \inf\{s \geq 0 : |B_s| = 1\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le processus X défini pour $t \geq 0$ par

$$X_t := e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \operatorname{sh}(\lambda(B_t + 1)), \quad \text{où } \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que X est une martingale par rapport à la filtration brownienne naturelle.
2. Montrer que pour $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E} \left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T_1^* \wedge t} \operatorname{sh}(\lambda(B_{T_1^* \wedge t} + 1)) \right] = \operatorname{sh}(\lambda)$$

Après avoir justifier que $T_1^* < +\infty$ presque sûrement, en déduire que

$$\mathbb{E} \left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T_1^*} \mathbf{1}_{\{B_{T_1^*}=1\}} \right] = \frac{\operatorname{sh}(\lambda)}{\operatorname{sh}(2\lambda)}$$

3. En déduire l'expression de la transformée de Laplace de T_1^* .
4. Pour $a > 0$, en déduire la transformée de Laplace de $T_a^* = \inf\{s \geq 0 : |B_s| = a\}$.

Exercice 8) *Se faire la main sur la formule d'Itô*

Écrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur dérive et le coefficient de diffusion

1. $X_t = B_t^2$,
2. $X_t = t + e^{B_t}$,
3. $X_t = B_t^3 - 3tB_t$,
4. $X_t = 1 + 2t + e^{B_t}$,
5. $X_t = [B_1(t)]^2 + [B_2(t)]^2$,
6. $X_t = (B_t + t) \exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$,
7. $X_t = \exp(t/2) \sin(B_t)$.

Exercice 9) *Équation différentielle stochastique linéaire à coefficients déterministes*

Soient (B_t) un mouvement brownien et (X_t, Y_t) le processus défini pour $t \geq 0$ par

$$X_t := \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right), \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \left[b(s) \exp\left(-\int_0^s a(u)du\right)\right] dB_s,$$

où a et b sont des fonctions déterministes. On pose $Z_t := X_t Y_t$. Montrer que $dZ_t = a(t)Z_t dt + b(t)dB_t$.

Exercice 10) *Brownien sur le cercle, le retour*

Soient (B_t) un mouvement brownien et

$$Y_t := \sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds, \quad t \geq 0.$$

Montrer que (Y_t) martingale par rapport à la filtration brownienne naturelle. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 11) *Une équation différentielle stochastique*

Soit (B_t) un mouvement brownien. On admet que le système suivant admet une solution bien définie pour tout temps $t \geq 0$

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t Y_s dB_s, \\ Y_t = y - \int_0^t X_s dB_s. \end{cases}$$

Montrer qu'alors $X_t^2 + Y_t^2 = (x^2 + y^2) e^t$.

Exercice 12) *Intégrales stochastiques et espérance*

Soient (B_t) un mouvement brownien et

$$Y_t = \int_0^t e^s dB_s, \quad Z_t = \int_0^t Y_s dB_s.$$

Calculer $\mathbb{E}[Z_t]$, $\mathbb{E}[Z_t^2]$ et $\mathbb{E}[Z_t Z_s]$.