

FEUILLE D'EXERCICES # 1

Exercice 1 *Processus d'Ornstein–Uhlenbeck*

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. On définit pour $t \geq 0$

$$Z_t := e^{-t/2} B_{e^t}.$$

1. Montrer que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien centré.
2. Montrer que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus stationnaire de fonction de covariance $\mathbb{E}[Z_s Z_t] = e^{-\frac{|t-s|}{2}}$.

Exercice 2 *Mouvement brownien fractionnaire*

Pour $0 < H < 1$, on considère la fonction de covariance

$$K_H(t, s) := \frac{1}{2} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

dont on admettra qu'elle est de type positif. Un processus gaussien centré $(B_t^H)_{t \geq 0}$ de fonction de covariance K_H est appelé mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst H .

1. Montrer que $(B_t^H)_{t \geq 0}$ vérifie la propriété de changement d'échelle $(B_t^H)_{t \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^{-H} (B_H(\lambda t))_{t \geq 0}$.
2. Montre que l'on a l'égalité $\mathbb{E}[|B_t^H - B_s^H|^2] = |t - s|^{2H}$ et en déduire une information sur la régularité des trajectoires.
3. Que peut-on dire du cas particulier $H = 1/2$?

Exercice 3 *Zéros du mouvement brownien*

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $Z := \{t \in [0, 1], B_t = 0\}$ l'ensemble de ses zéros sur l'intervalle de temps $[0, 1]$. Montrer que, presque sûrement, Z est un ensemble compact, sans point isolé, de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 4 ★ *Pont Brownien*

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien, on définit $W_t := B_t - tB_1$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer que le processus $(W_t)_{t \in [0, 1]}$ est un processus gaussien centré et expliciter sa fonction de covariance.
2. Montrer que pour tout $0 < t_1 < \dots < t_p < 1$, la loi de $(W_{t_1}, \dots, W_{t_p})$ admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$p(x_1, \dots, x_p) = \sqrt{2\pi} p_{t_1}(x_1 - 0) p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \dots p_{t_d - t_{d-1}}(x_d - x_{d-1}) p_{1 - t_d}(0 - x_d),$$

$$\text{où } p_t(x) = \frac{e^{-x^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}$$

3. Justifier que cette loi peut être vue comme la loi de $(B_{t_1}, \dots, B_{t_d})$ conditionnellement à $B_1 = 0$.

Exercice 5) *Encore un brownien*

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. On définit pour $t \geq 0$

$$Z_t := B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds.$$

1. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire Z_t est finie presque sûrement.
2. Montrer que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien.
3. Montrer que le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Exercice 6) *Inversion du temps*

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. On définit $Z_0 = 0$ et pour $t > 0$, $Z_t := tB_{1/t}$.

1. Vérifier que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est à nouveau un mouvement brownien.
2. En déduire que lorsque t tend vers l'infini B_t/t tend presque sûrement vers zéro.

Exercice 7) *Exponentielle brownienne*

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Pour $\lambda > 0$ et $t \geq 0$, on définit $M_t := e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}$.

1. Montrer que les variables M_t sont intégrables.
2. Montrer le processus (M_t) est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \leq t)$.
3. Montrer M_t converge presque sûrement lorsque t tend vers l'infini et préciser sa limite.
4. La martingale (M_t) est-elle uniformément intégrable ?

Exercice 8) *Régularité*

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien.

1. À l'aide de la loi du zéro-un, montrer que presque sûrement

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty.$$

2. En déduire que presque sûrement, $t \mapsto B_t$ n'est pas dérivable à droite en zéro. Généraliser.

Exercice 9) ★ *Sur les martingales*

Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale positive à trajectoires continues issue de $x \geq 0$. On suppose que M_t converge presque sûrement vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

1. Montrer que, pour tout $y > x$, on a alors

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} M_t \geq y \right) = \frac{x}{y}.$$

2. En déduire la loi de la variable aléatoire $\sup_{0 \leq t \leq T_0} (x + B_t)$ lorsque $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien et $T_0 = \inf\{t \geq 0, x + B_t = 0\}$.
3. Si $\lambda > 0$, en introduisant une martingale exponentielle bien choisie, montrer la variable aléatoire

$$\sup_{t \geq 0} \left(B_t - \frac{\lambda t}{2} \right)$$

suit la loi exponentielle de paramètre λ .